NOTA ELEVULUI

Aplicații ale monotoniei mediilor în raport cu ordinul lor

Codrin ANDREI şi Ştefan RUSU[1]

Fie date numerele $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}^*_+$ ($n \in \mathbf{N}^*$) şi $\alpha \in \mathbf{R}$. Se numeşte *media de ordin α* a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$ numărul $M_\alpha(x_1,...,x_n)$ (pe scurt, M_α) definit prin

$$M_\alpha = \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\,, & \alpha = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Observăm că $M_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = G_n$ este *media geometrică*, $M_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = A_n$ - *media aritmetică* şi că $M_{-1} = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = H_n$ - *media armonică* a numerelor date.

Mai general, se numeşte *media ponderată de ordin α* a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$ cu ponderile (pozitive) $p_1, p_2, ..., p_n$ numărul $M_\alpha(x, p)$ (pe scurt, M_α) definit prin

$$M_\alpha(x, p) = \begin{cases} \left(\dfrac{p_1 x_1^\alpha + p_2 x_2^\alpha + ... + p_n x_n^\alpha}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right)^{1/\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ \left[(x_1)^{p_1} (x_2)^{p_2} ... (x_n)^{p_n}\right]^{1/(p_1 + p_2 + ... + p_n)}, & \alpha = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(pentru $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, (2) devine (1)).

Vom prezenta mai întâi un rezultat binecunoscut, anume :

Propoziție. *Mediile (ponderate sau nu) sunt monoton crescătoare în raport cu ordinul lor, adică* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta \Rightarrow M_\alpha \leq M_\beta$.

Demonstrație. Să presupunem mai întâi că avem $0 < \alpha < \beta$. Ca urmare, există $t > 1$ astfel încât $\beta = t\,\alpha$. Utilizăm *inegalitatea lui Jensen* pentru funcția convexă $f(x) = x^t$, $x \in (0, \infty)$, şi scriem :

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right)^t \leq \frac{p_1 x_1^t + p_2 x_2^t + ... + p_n x_n^t}{p_1 + p_2 + ... + p_n}. \tag{3}$$

Înlocuim în aceasta $x_1, x_2, ..., x_n$ respectiv cu $x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha$; obținem :

[1] Elevi, Liceul Teoretic "Gr. Moisil", Iaşi

$$\left(\frac{p_1x_1^{\alpha}+p_2x_2^{\alpha}+...+p_nx_n^{\alpha}}{p_1+p_2+...+p_n}\right)^t \le \frac{p_1x_1^{t\alpha}+p_2x_2^{t\alpha}+...+p_nx_n^{t\alpha}}{p_1+p_2+...+p_n}$$

şi , prin ridicare la puterea pozitivă $\frac{1}{t\alpha}$ deducem că $M_\alpha \le M_{t\alpha}$, adică $M_\alpha \le M_\beta$.

Dacă $\alpha<\beta<0$, atunci există $t>1$ astfel încât $\alpha=t\,\beta$. Se procedează în mod similar: în (3) se înlocuiesc $x_1, x_2, ..., x_n$ cu $x_1^{\beta}, x_2^{\beta}, ..., x_n^{\beta}$, se ridică la puterea negativă $\frac{1}{t\beta}$ ambii membri ai inegalităţii rezultate şi se obţine $M_\beta \ge M_{t\beta}$, adică $M_\alpha \le M_\beta$.

În sfârşit, dacă în inegalitatea $M_\alpha < M_\beta$ ($0<\alpha<\beta$) facem ca α să tindă la zero, vom obţine $M_0 < M_\beta$ ($\beta>0$). Tot ca un caz limită se obţine şi $M_\alpha < M_0$ ($\alpha<0$). Q.e.d.

Indicăm câteva aplicaţii ale propoziţiei de mai sus.

1. *Să se rezolve ecuaţia* $\left(x+\frac{1}{x}\right)^y+\left(x-\frac{1}{x}\right)^y=2x^y,\ x\ge 1$ *şi* $y>0.$

Soluţie. Avem trei cazuri :

I. $y=1$. Ecuaţia devine $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=2x$ şi aceasta este verificată de orice $x\ge 1$.

Aşadar perechile $(x,1)$, $\forall\ x\ge 1$, sunt soluţii ale ecuaţiei date.

II. $0<y<1$. Utilizând inegalitatea $M_y \le M_1$ pentru numerele distincte $\left(x+\frac{1}{x}\right)^y$ şi $\left(x-\frac{1}{x}\right)^y$

obţinem : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^y+\left(x-\frac{1}{x}\right)^y<2\left(\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)\right]\Big/2\right)^y=2x^y$, deci ecuaţia dată nu are soluţii în acest caz.

III. $y>1$. Utilizăm de această dată inegalitatea $M_1 \le M_y$ pentru aceleaşi numere distincte şi obţinem că membrul întâi al ecuaţiei este strict mai mare ca $2x$. Deci nu avem soluţii.

Rezumând, ecuaţia dată are ca soluţii perechile $(x,1)$, $\forall\ x\ge 1$.

2. *Fie* $a, b, c>0$ *cu* $abc=1$. *Demonstraţi inegalitatea* $2(a+b+c)\le a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ (**V. Popa**, *G : 615*, R. M. Galaţi, nr. 17-18).

Soluţie. Prin calcul direct constatăm că $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-2(a+b+c)=(a+b+c)(ab+bc+ca-2)-3abc$ şi, deci,avem de arătat că $(a+b+c)(ab+bc+ca-2)\ge 3$ (1) (am utilizat condiţia $abc=1$). Inegalitatea $A\ge G$ pentru numerele a, b, c revine la $a+b+c\ge 3$ (2) iar $G\ge H$ conduce la $1\ge 3/(ab+bc+ca)$ sau $ab+bc+ca-2\ge 1$ (3) (s-a ţinut seama de relaţia $abc=1$). Din (2) şi (3) , prin înmulţire, se obţine (1).

3. *Să se arate că* $\dfrac{1}{2^{n-1}} \le \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1,\ \forall\ \alpha \in \mathbf{R}$ *şi* $n \in \mathbf{N}^*$.

Soluţie. Partea dreaptă se dovedeşte astfel : $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^n = 1$.

Pentru a dovedi inegalitatea din partea stângă, utilizăm $M_1 \le M_n$ pentru numerele $\sin^2\alpha$ şi $\cos^2\alpha$; obţinem : $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \ge 2[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)/2]^n = 1/2^{n-1}$, q.e.d.

4. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi numărul* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Au loc inegalităţile* :

(i) $b^\alpha + c^\alpha \le 2^{1-\alpha/2}a^\alpha$, *dacă* $\alpha \le 2$ (ii) $b^\alpha + c^\alpha \ge 2^{1-\alpha/2}a^\alpha$, *dacă* $\alpha \ge 2$.

Soluţie. Avem $\alpha \le 2 \Rightarrow M_\alpha(b,c) \le M_2(b,c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(b^\alpha + c^\alpha)/2\right]^{1/\alpha} \le \left[(b^2 + c^2)/2\right]^{1/2} = a/\sqrt{2} \Rightarrow b^\alpha + c^\alpha \le 2^{1-\alpha/2}a^\alpha$.

Similar se procedează pentru a dovedi (ii).

5. *Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul C(O,R) şi* $M \in C(O,R)$ *oarecare. Arătaţi că* $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $\alpha \le 2$, $2 \le \beta \le 4$ *şi* $\gamma \ge 4$ *au loc inegalităţile:*

(i) $MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha \le 3 \cdot 2^{\alpha/2} \cdot R^\alpha$; (*ii*) $MA^\gamma + MB^\gamma + MC^\gamma \ge 3 \cdot 6^{\gamma/4} \cdot R^\gamma$

(iii) $3 \cdot 2^{\beta/2} \cdot R^\beta \le MA^\beta + MB^\beta + MC^\beta \le 3 \cdot 6^{\beta/4} \cdot R^\beta$.

Soluţie. Sunt cunoscute relaţiile următoare : $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$ şi $MA^4+MB^4+MC^4=18R^4$ ([**1**], pp. 27-28). Ca urmare, $M_2(MA, MB, MC)=R\sqrt{2}$ şi $M_4(MA,MB,MC)=R\sqrt[4]{6}$. Pe de altă parte, avem : $M_\alpha \le M_2 \le M_\beta \le M_4 \le M_\gamma$. Din $M_\alpha \le M_2$ urmează că $MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha = 3(M_\alpha)^\alpha \le 3(M_2)^\alpha = 3 \cdot 2^{\alpha/2} \cdot R^\alpha$, adică (i). Analog se obţin (ii) şi (iii).

6. *Fie ABCD un pătrat înscris înscris în cercul* $C(O,\ r)$. *Fie* $M \in C(O,r)$ *şi* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $\alpha \le 2$, $2 \le \beta \le 4$ *şi* $\gamma \ge 4$. *Arătaţi că au loc inegalităţile* :

(i) $MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha + MD^\alpha \le 4 \cdot (3/2)^{\alpha/2} \cdot r^\alpha$; (*ii*) $MA^\gamma + MB^\gamma + MC^\gamma + MD^\gamma \ge 4 \cdot 6^{\gamma/4} \cdot r^\gamma$

(iii) $4 \cdot (3/2)^{\beta/2} \cdot r^\beta \le MA^\beta + MB^\beta + MC^\beta + MD^\beta \le 4 \cdot 6^{\beta/4} \cdot r^\beta$.

Soluţie. Se utilizează egalităţile: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6r^2$ şi $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = 24r^4$ [**4**] şi , procedând ca în problema precedentă, se obţin inegalităţile cerute.

Bibliografie

1.C. Cocea - *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral,* Ed. „Gh. Asachi”, Iaşi, 1992 .

2.L. Pîrşan, C.-G. Lazanu -*Probleme de algebră şi trigonometrie,* Ed. Facla, Timişoara,1983.

3.V. Ştefănescu, N. Deval - *Asupra unor inegalităţi între medii generalizate şi aplicaţiile lor,* G.M. –1/1985, 8-11.
4.G. Ţiţeica – *Culegere de probleme de geometrie,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.