Generalizarea problemei "bisectoarei glisate"

Cristiana Artenie şi Cristiana Constanda

Am numit astfel următoarea problemă propusă de *C. Ciupală* în G. M. - 1/1997:

Problema C: 1887. *Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $N \in (CA)$ astfel încât $\frac{MB}{NC} = \frac{BQ}{QC} = k$. Dacă $P \in (MN)$, să se arate că PQ este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului BAC dacă şi numai dacă $\frac{MP}{NP} = k$.*

Generalizarea pe care o prezentăm mai jos constă în *trecerea de la "bisectoarea glisată" la "ceviana glisată"*. Aceasta poate fi atât interioară cât şi exterioară. Mai mult, vom pune în evidenţă şi câteva reciproce ale propoziţiei stabilite.

Avem nevoie de lemele următoare:

Lema 1 (F. Smarandache - C:1996, G. M. 1 /1998). *Fie triunghiul ABC şi $X \in BC$. Demonstraţi că:*

$$\frac{BC}{CX} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}}. \tag{1}$$

(*O generalizare a teoremei bisectoarei.*)

Demonstraţie. Indiferent dacă ceviana AX este interioară sau exterioară (adică $X \in (BC)$ sau nu), considerăm triunghiurile BXA şi CXA şi aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{BA}{\sin \widehat{BXA}} = \frac{BX}{\sin \widehat{BAX}}, \quad \frac{CA}{\sin \widehat{CXA}} = \frac{CX}{\sin \widehat{CAX}}.$$

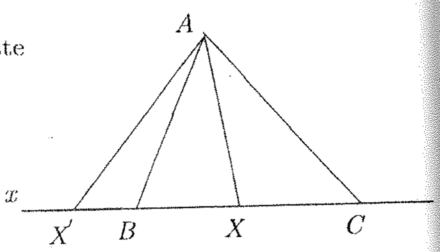

Fig. 1

Întrucât $\sin \widehat{BXA} = \sin \widehat{CXA}$, prin împărţirea acestor egalităţi se obţine (1).

Observaţia 1. Problema **C:1996** are în vedere numai cevienele interioare.

Reciproca acestei leme este de asemenea adevărată şi se demonstrează prin reducere la absurd (ca şi reciproca teoremei bisectoarei).

Lema 2. a) *Fie $X \in (BC)$ şi numărul α, $0 < \alpha < m(\hat{A})$, astfel încât are loc relaţia*

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(A - \alpha)}. \tag{2}$$

Atunci ceviana AX face cu latura AB un unghi de măsură α.

b) *Fie $X' \in (Bx$ şi numărul α, $0 < \alpha < m(\hat{B})$, astfel încât are loc:*

$$\frac{BX'}{CX'} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(A + \alpha)}. \tag{3}$$

Atunci ceviana AX' face cu latura AB un unghi de măsură α.

[1] Eleve, cl. a VIII-a, Lic. "C. Negruzzi" Iaşi

Propoziţia 1. *Fie AX, $X \in (BC)$, o ceviană interioară triunghiului ABC. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\dfrac{MB}{NC} = k\dfrac{\sin\widehat{XAC}}{\sin\widehat{XAB}}$ şi $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{QB}{QB} = k$. Atunci $PQ \parallel AX$.*

Demonstraţie. Cu notaţia $\alpha = m(\widehat{XAB})$ şi ţinând seama de ipoteză, obţinem $k = \dfrac{MB}{NC} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}$. Construim paralelogramele $BMPT$ şi $CNPR$ (fig. 2). Avem $\dfrac{BT}{CR} = \dfrac{MP}{NP} = k$ şi, deci, $\dfrac{BT}{CR} = \dfrac{BQ}{CQ} = k$.

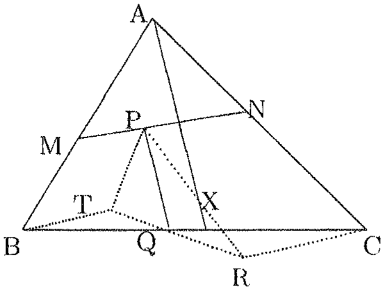

Fig. 2

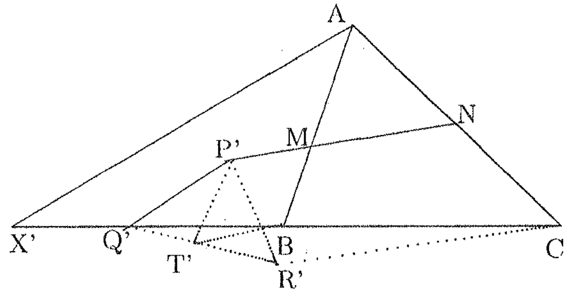

Fig. 3

De aici şi din faptul că $\widehat{TBQ} \equiv \widehat{RCQ}$ ($TB \parallel RC$), rezultă că $\Delta TBQ \sim \Delta RCQ$. Ca urmare, punctele T, Q, R sunt coliniare şi avem $\dfrac{TQ}{RQ} = k$. Aşadar, $\dfrac{TQ}{RQ} = \dfrac{MB}{NC} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}$ sau $\dfrac{TQ}{RQ} = \dfrac{PT}{PR} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}$. Conform Lemei 2 aplicată triunghiului PTR ($\widehat{TPR} \equiv \widehat{BAC}$), această ultimă relaţie implică faptul că $m(\widehat{QPT}) = \alpha$. Cum $PT \parallel AB$, urmează că $PQ \parallel AX$, q.e.d.

Propoziţia 2. *Fie AX', $X \in (Bx$ o ceviană exterioară triunghiului ABC. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\dfrac{MB}{NC} = k\dfrac{\sin X'AC}{\sin X'AB}$ şi fie $P' \in MN$ în ordinea $P' - M - N$ şi $Q' \in BC$ în ordinea $Q' - B - C$ astfel încât $\dfrac{P'M}{P'N} = \dfrac{Q'B}{Q'C} = k$. Atunci $P'Q' \parallel AX'$.*

Demonstraţie. Se urmează aceeaşi cale ca în demonstraţia precedentă.

Observaţia 2. Ceviana AX' este bisectoarea exterioară a unghiului A dacă $\alpha = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$.

Observaţia 3. Întrucât ipoteza Propoziţiei 1 sau Propoziţiei 2 este formată din trei condiţii, iar concluzia din una singură, putem enunţa câte trei reciproce pentru aceste propoziţii. Toate aceste reciproce sunt adevărate; ele se pot demonstra prin reducere la absurd, utilizând propoziţia directă şi unicitatea paralelei dusă la o dreaptă printr-un punct exterior ei.