# OLIMPIADA de MATEMATICA din CANADA

## 31 martie 1999

**1999**

# The Canadian Mathematical Olympiad

**Wednesday** **March 31**

---

1. Find all real solutions to the equation $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

   Here, if $x$ is a real number, then $[x]$ denotes the greatest integer that is less than or equal to $x$.

2. Let $ABC$ be an equilateral triangle of altitude 1. A circle with radius 1 and center on the same side of $AB$ as $C$ rolls along the segment $AB$. Prove that the arc of the circle that is inside the triangle always has the same length.

3. Determine all positive integers $n$ with the property that $n = (d(n))^2$. Here $d(n)$ denotes the number of positive divisors of $n$.

4. Suppose $a_1, a_2, \ldots, a_8$ are eight distinct integers from $\{1, 2, \ldots, 16, 17\}$. Show that there is an integer $k > 0$ such that the equation $a_i - a_j = k$ has at least three different solutions. Also, find a specific set of 7 distinct integers from $\{1, 2, \ldots, 16, 17\}$ such that the equation $a_i - a_j = k$ does not have three distinct solutions for any $k > 0$.

5. Let $x$, $y$, and $z$ be non-negative real numbers satisfying $x + y + z = 1$. Show that

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27},$$

and find when equality occurs.

# OLIMPIADA de MATEMATICĂ din CANADA
## 31 martie 1999

## L'Olympiade mathématique du Canada 1999

**Mercredi** **Le 31 mars**

1. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.
   Si $x$ est un nombre réel, alors $[x]$ représente ici le plus grand entier plus petit ou égal à $x$.
2. Soit $ABC$ un triangle équilatéral de hauteur 1. Un cercle de rayon 1 et de centre du même côté de $AB$ que $C$ roule le long du segment $AB$. Montrer que l'arc du cercle à l'intérieur du triangle a toujours la même longueur.
3. Trouver tous les nombres entiers positifs $n$ ayant la propriété que $n = (d(n))^2$. On représente ici par $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de $n$.
4. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_8$ des nombres entiers distincts tous pris de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 16, 17\}$. Montrer qu'il existe un nombre entier $k > 0$ de sorte que l'équation $a_i - a_j = k$ ait au moins trois solutions différentes. De plus, trouver un ensemble spécifique de 7 entiers distincts tous pris de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 16, 17\}$ de sorte que l'équation $a_i - a_j = k$ ne comporte pas trois solutions différentes pour tout $k > 0$.
5. Soient $x$, $y$, et $z$ des nombres réels non négatifs satisfaisant $x + y + z = 1$. Montrer que
$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27},$$
et décrire les cas d'égalité.