O problemă de loc geometric

Ioan POP[1]

Abstract. In this Note a problem inspired by an old problem due to P. Fermat is proposed and discussed.

Keywords: rectangle, straight lines, point intersection locus.

MSC 2010: 51M16.

Problema de mai jos i-a fost sugerată autorului de un articol din 2013 al matematicianului croat *Zvonko Čerin*, care generalizează o problemă de geometrie formulată de către marele matematician francez **Pierre Fermat** (1601-1665).

Problemă. *Se consideră dreptunghiul* $ABCD$ *cu* $|AB| = |AD|\sqrt{2}$. *Pe segmentul* $[CD]$ *se consideră punctele* M *şi* N *astfel încât* $|CM|^2 + |DN|^2 = |AB|^2$. *Să se afle locul geometric al punctelor de intersecţie a dreptelor* AM *şi* BN.

Soluţie. Alegem un reper ortonormat xOy cu originea O în mijlocul segmentului $[CD]$, cu axa Ox dată de direcţia şi sensul vectorului $\overrightarrow{OC}$. Fie, în raport cu acest reper, $C(a,0), B(a,-b)$. Avem, atunci, $D(-a,0)$ şi $A(-a,-b)$. Prin ipoteză este dată relaţia

$$2a = b\sqrt{2} \Leftrightarrow b = a\sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 2a^2. \tag{1}$$

Notăm apoi $M(\lambda,0)$ şi $N(\mu,0)$, $-a \leq \lambda, \mu \leq a$, şi avem:

$$(a-\lambda)^2 + (a+\mu)^2 = 4a^2. \tag{2}$$

Ecuaţiile dreptelor AM şi BN sunt, respectiv

$$AM : \frac{x+a}{\lambda+a} = \frac{y+b}{b}, \tag{3}$$

$$BN : \frac{x-a}{\mu-a} = \frac{y+b}{b}. \tag{4}$$

(Amintim, pentru începători, că anularea unui numitor în aceste ecuaţii implică anularea numărătorului respectiv.)

Eliminăm acum parametrii λ şi μ între relaţiile (2), (3) şi (4) şi se obţine, mai întâi,

$$\left[\frac{b(x+a)}{y+b} - 2a\right]^2 + \left[\frac{b(x-a)}{y+b} + 2a\right]^2 = 4a^2, \tag{5}$$

[1]Profesor dr., Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza" Iaşi, Romania; *ioanpop@mail.uaic.ro*

de unde

$$2b^2(x^2+a^2) - 8a^2b(y+b) + 4a^2(y+b)^2 = 0$$

şi, utilizând (1), avem

$$4a^2(x^2+a^2) - 8a^2b(y+b) + 4a^2(y+b)^2 = 0$$

şi apoi

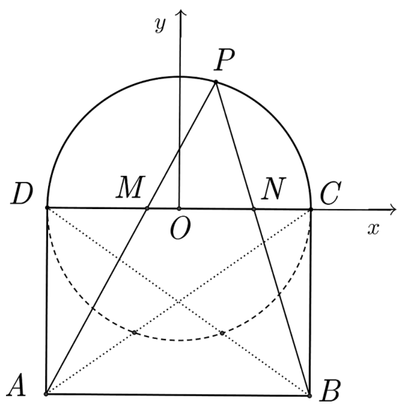
$$x^2 + y^2 + a^2 - b^2 = 0$$

care, împreună cu (1) din nou, ne dă

$$(\gamma): x^2 + y^2 = a^2, \tag{6}$$

adică cercul (γ) de diametru $[CD]$.

Prin urmare, locul geometric $\mathcal{L}$ cerut este inclus în cercul (γ).



Reciproc, să vedem dacă cercul (γ) în întregime sau numai o parte a acestuia este submulţime a lui $\mathcal{L}$. Păstrăm notaţiile precedente şi fie un punct al cercului (γ), $P(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Atunci, ecuaţiile dreptelor AP şi BP sunt, respectiv,

$$AP: \frac{x+a}{a\cos\alpha + a} = \frac{y+b}{a\sin\alpha + b}, \tag{7}$$

$$BP: \frac{x-a}{a\cos\alpha - a} = \frac{y+b}{a\sin\alpha + b}. \tag{8}$$

Atunci, punctele M' şi, respectiv, N' de intersecţie a acestor drepte cu dreapta DC, de ecuaţie $y = 0$, au abscisele

$$x_{M'} = \frac{a(b\cos\alpha - a\sin\alpha)}{a\sin\alpha + b}, \tag{9}$$

$$x_{N'} = \frac{a(b\cos\alpha + a\sin\alpha)}{a\sin\alpha + b}. \tag{10}$$

Putem calcula $|DN'|^2 + |CM'|^2 = (x_{N'} + a)^2 + (x_{M'} - a)^2 = x_{M'}^2 + x_{N'}^2 + 2a^2 + 2a(x_{N'} - x_{M'})$. Şi se verifică că această sumă este $4a^2$, dacă $b^2 = 2a^2$. Prin urmare, s-ar părea că am arătat că $P(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ este un punct al locului geometric. Dar, să ne amintim că mai era condiţia ca punctele M şi N, aici M' şi N', să se afle pe segmentul $[CD]$. Să vedem dacă acest lucru se întâmplă pentru orice punct al cercului (γ) sau numai pe o parte din acesta. Să notăm cu (γ_A) porţiunea din cercul (γ) cuprinsă în interiorul unghiului $\widehat{DAC}$. Este clar că $M' \in [CD]$ dacă şi numai dacă

$P \in (\gamma_A)$. În mod analog, dacă (γ_B) notează porţiunea din (γ) cuprinsă în interiorul unghiului $\widehat{CBD}$, punctul $N' \in [CD]$ dacă şi numai dacă $P \in (\gamma_B)$. Or, deoarece dreptele AC si BD se intersectează în interiorul lui (γ), rezultă că $(\gamma_A) \cap (\gamma_B) = (\gamma^+) := \{P(a\cos\alpha, a\sin\alpha) | \alpha \in [0, \pi]\}$. (Se poate ajunge la această concluzie şi utilizând abscisele $x_{M'}$ şi $x_{N'}$ impunând condiţiile $-a \leq x_{M'}, x_{N'} \leq a$).

Prin urmare, **locul geometric căutat este semicercul** (γ^+).

Notă. Utilizând notaţiile noastre, *problema lui Fermat* afirmă că, dacă $P \in (\gamma^+)$, atunci $|DN'|^2 + |CM'|^2 = |AB|^2$, în ipoteza că $|AB| = |CD|\sqrt{2}$. (Deci este o parte din problema noastră). Problema lui Fermat a fost rezolvată, pentru prima dată, de către alt mare matematician, elveţianul **Leonard Euler** (1707-1783) (vezi [**2**]) şi apoi de către alţii.

Autorului i s-a părut util să propună această problemă nu doar din acest motiv de natură istorică, ci şi fiindcă oferă un exemplu privind importanţa verificării ambelor incluziuni în cazul unei probleme de loc geometric.

Bibliografie

1. Z. Čerin – *On the Fermat Geometric Problem*, Forum Geometricorum, Vol. 13(2013) 135–147.

2. E. Sandifer – *A forgotten Fermat problem. How Euler Dit It*, MAA, Washington, DC, 2007, at www.maa.org/ed-sandifers-how-euler-did-it.

Recreaţii ... matematice

Probleme de calcul într-un triunghi cu rezultat **happy end** (*ca în filme*):

1. *Arătaţi că în orice triunghi are loc relaţia:*

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,(a+b+c)\,abcy =$$  $$, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

2. *Fie triunghiul ABC şi M, N, P punctele de contact ale cercului înscris în triunghi cu laturile BC, AC, respectiv AB. Dacă r este raza cercului înscris şi $x = AP$, $y = BM$, $z = CN$, atunci*

$$2r\,(x+y+z)^2\,(y+z)\,(x+y)\cos^2\frac{B}{2} =$$ 

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

(*Soluţii la p. 149*)