O problemă cu cercuri egale

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. This Note offers an example of the way to follow in order to find and develop, by the students themselves, a subject of geometry at the level of their acquired mathematical knowledge.
Keywords: circle, centroid, incenter, circumcenter, orthocenter.

MSC 2010: 51M04.

Am pledat în această rubrică şi în alte rânduri pentru realizarea de către elevi a unor note sau studii proprii, la nivelul lor. Susţinem şi acum părerea că un elev cu înclinaţie pentru matematică poate găsi cu forţe proprii un subiect de studiu, în limitele cunoştinţelor acumulate.

Considerăm că dificultatea cea mai mare pentru un astfel de demers este înlăturarea unei anumite rutine înrădăcinată în şcoli. Mai precis, elevul cu aptitudini trebuie *să renunţe la statutul de veşnic rezolvitor de probleme* şi să se ridice pe o treaptă superioară de creativitate, anume, treapta formulării de către sine a unor întrebări şi probleme şi, în final, alcătuirea unei lucrări.

Cum ar putea proceda un elev bun pentru *a găsi* şi *a trata* un subiect de nivelul său? Sumar spus, subiectul de studiu trebuie căutat printre problemele cu care se confruntă în mod obişnuit şi trebuie degajat prin formulare de întrebări. Tratarea subiectului selectat ca promiţător constă în a da răspuns la întrebări şi, deci, revine la rezolvarea obişnuită a unui număr de probleme.

În acest sens, ne propunem să oferim un *model de lucru*, o notă, pe care ar putea-o realiza cu multă uşurinţă orice elev de clasa a IX-a, dacă acesta se decide să schimbe comportamentul de rezolvitor în cel de cercetător.

Fie dat un triunghi ABC şi fie H ortocentrul său. Problema ,,sursă de inspiraţie" a notei este următoarea proprietate binecunoscută a ortocentrului: *pentru orice triunghi ABC, simetricul ortocentrului H faţă de BC se află pe cercul circumscris triunghiului*, proprietate care se poate reformula astfel: *simetricul cercului circumscris triunghiului HBC este cercul circumscris triunghiului dat ABC*. În particular, cercurile circumscrise triunghiurilor HBC şi ABC sunt egale (au raze egale), deci are loc următoarea afirmaţie:

Propoziţia 1. *Pentru orice triunghi ABC, cercul circumscris triunghiului HBC este egal cu cercul circumscris triunghiului dat.*

[1]Prof. dr., Universitatea Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.com*

Astfel modificată proprietatea menţionată a ortocentrului H, este simplu să ne punem un număr de întrebări. Mai întâi, să convenim asupra unor notaţii în triunghiul XYZ: $\mathcal{C}_{XYZ}$ – cercul circumscris, S_{XYZ} – aria sa, R_{XYZ} – raza cercului circumscris etc., iar în cazul triunghiului ABC omitem indicii: $\mathcal{C}$, S, R, p etc.

1. Ce se întâmplă dacă în locul punctului H vom considera alte puncte, cum ar fi I, G, O etc.? Pentru a avea egalitatea cercurilor respective, este de bănuit că vor fi necesare anumite restricţii asupra triunghiului ABC; care restricţii?

2. Egalitatea a două dintre razele R_{HBC}, R_{IBC}, R_{GBC}, R_{OBC} ş.a. ce restricţie impune triunghiului dat?

3. Se ştie că $S_{GBC} = \frac{1}{3}S$; dacă una dintre ariile S_{HBC}, S_{IBC}, S_{OBC} ş.a. este egală cu $\frac{1}{3}S$, cum va fi triunghiul ABC ?

4. Dacă două dintre ariile S_{HBC}, S_{IBC}, S_{OBC} ş.a. sunt egale, ce restricţie revine triunghiului ABC?

5. Dar dacă una dintre razele r_{HBC}, r_{IBC}, r_{GBC}, r_{OBC} ş.a. ar fi egale cu r sau am avea egalitatea a două dintre aceste raze?

Ne vom referi detaliat numai la prima problemă. Mai jos, vom utiliza următorul rezultat (cu demonstraţie imediată!):

Lemă. *Dat un triunghi ABC, locul geometric al punctelor P din planul triunghiului ce îndeplinesc condiţia $R_{PBC} = R$ este reuniunea $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$, unde $\mathcal{C}_1$ este simetricul cercului $\mathcal{C}$ în raport cu BC.*

Menţionăm faptul că acest loc nu coincide cu cel al punctelor care văd segmentul BC sub un unghi constant egal cu A (în acesta din urmă cercurile $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_1$ nu intră în întregime).

Propoziţia 2. *Dacă triunghiul IBC are aceeaşi rază a cercului circumscris ca şi triunghiul ABC, i.e. $R_{IBC} = R$, atunci $A = 60^0$.*

Soluţia 1 (*sintetică*). Ţinând seama de ipoteză şi conform Lemei, avem că $I \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$. Deoarece I este interior triunghiului ABC, rezultă că acest punct se află pe arcul cercului $\mathcal{C}_1$ ce este interior triunghiului. Ca urmare, simetricul lui I în raport cu BC, notat I_1, se află pe arcul BC al cercului $\mathcal{C}$ care nu conţine vârful A şi avem că unghiurile $\widehat{BI_1C}$ şi $\widehat{BIC}$ sunt congruente (Fig. 1). Deci, $\mathrm{m}(I_1) = \mathrm{m}(I)$ şi, cum $\mathrm{m}(I_1) = 180^0 - A$, iar în triunghiul IBC, avem că $\mathrm{m}(I) = 180^0 - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 90^0 + \frac{A}{2}$, egalitatea precedentă se scrie: $180^0 - A = 90^0 + \frac{A}{2}$. De aici, $A = 60^0$, q.e.d.

Soluţia 2 (*trigonometrică*). Exprimăm razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi IBC cu teorema sinusurilor: $2R = \frac{a}{\sin A}$, $2R_{IBC} = \frac{a}{\sin I}$. Condiţia din ipoteză conduce la ecuaţia $\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin I}$, adică $\sin A = \sin I$. Cum $\mathrm{m}(I) = 90^0 + \frac{A}{2}$, obţinem că $\sin A = \sin(90^0 + \frac{A}{2})$ şi apoi $A = 60^0$.

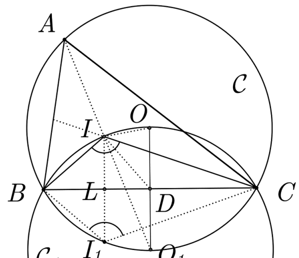

Fig. 1

Soluţia 3 (*calculatorie*). Să adoptăm notaţiile: D – mijlocul laturii BC, L – proiecţia lui I pe BC, O_1 – centrul cercului $\mathcal{C}_1$ (Fig. 1). Conform Lemei, $I \in \mathcal{C}_1$, adică $O_1I = R$. Cu teorema medianei, avem:

$$O_1I^2 + OI^2 = 2ID^2 + 2OD^2.$$

Deoarece $O_1I^2 = R^2$, $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (Euler), $ID^2 = IL^2 + LD^2 = r^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ şi $OD^2 = R^2\cos^2 A$, relaţia precedentă se scrie:

$$R^2 + \left(R^2 - 2Rr\right) = 2\left[r^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2\right] + 2R^2\cos^2 A,$$

de unde, după calcule simple obţinem:

$$R^2\sin^2 A = r^2 + Rr + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Ţinând seama că $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ şi că $(b-c)^2 = 4R^2(\sin B - \sin C)^2 = 16R^2\sin^2\frac{B-C}{2}\sin^2\frac{A}{2}$, rezultă că

$$\sin^2 A = 16\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4\sin^2\frac{B-C}{2}\sin^2\frac{A}{2}$$

sau

$$\sin^2\frac{A}{2}\left(\sin^2\frac{B+C}{2} - \sin^2\frac{B-C}{2}\right) = 4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

de unde, scriind paranteza ca un produs şi apoi împărţind cu $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1.$$

Utilizând formulele: $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$ şi $\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [**2;** 13.3, 13.5], ajungem la relaţia $\cos A = \frac{1}{2}$, adică $A = 60^0$.

În privinţa punctului G, pentru măsura unghiului $\widehat{BGC}$ nu avem o expresie simplă prin unghiurile triunghiului ABC şi, ca urmare, nu vom da soluţii de tipul 1 şi 2, ci doar calculatorii.

Propoziţia 3. *Dacă triunghiul GBC are aceeaşi rază a cercului circumscris ca şi triunghiul ABC, i.e. $R_{GBC} = R$, atunci $2a^2 = b^2 + c^2$ (triunghiul ABC este automedian).*

Soluţia 1 (*calculatorie*). Notând cu m_a, m_b, m_c lungimile medianelor triunghiului dat şi aplicând formula $R = \dfrac{abc}{4S}$ la triunghiul GBC, condiţia $R_{GBC} = R$ se scrie:

$$\frac{a \cdot \frac{2}{3}m_b \cdot \frac{2}{3}m_c}{4S_{GBC}} = R \qquad \text{sau} \qquad a \cdot m_b \cdot m_c = 9R \cdot S_{GBC}.$$

Cum $S_{GBC} = \frac{1}{3}S$, urmează că $a \cdot m_b \cdot m_c = 3R \cdot S = \frac{3}{4}abc$, de unde rezultă că $4m_b m_c = 3bc$, care este condiţia pe care trebuie să o verifice triunghiul dat. Cu ajutorul teoremei medianei, avem:

$$\begin{aligned} 16m_b^2 m_c^2 &= 9b^2c^2 \Leftrightarrow \left(2a^2+2c^2-b^2\right)\left(2a^2+2b^2-c^2\right)=9b^2c^2 \Leftrightarrow \\ 2a^4+a^2b^2+a^2c^2-\left(b^2+c^2\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left[a^4-\left(b^2+c^2\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow \\ \left(a^2+b^2+c^2\right)\left[a^2+\left(a^2-b^2-c^2\right)\right] &= 0 \Leftrightarrow 2a^2=b^2+c^2, \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Soluţia 2 (*calculatorie*). Deoarece $G \in \mathrm{Int}(ABC)$, urmează că $G \in \mathcal{C}_1$, adică avem că $O_1G = R$ (Fig. 2). Cu teorema medianei, aplicată la triunghiul OO_1G, obţinem relaţia:

$$O_1G^2 + OG^2 = 2GD^2 + 2OD^2.$$

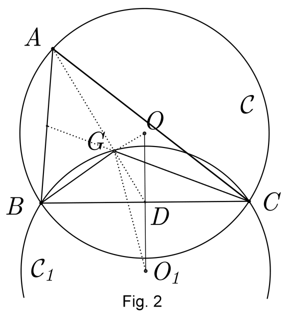

Fig. 2

Ţinând seama că avem $O_1G = R$, $OG^2 = \dfrac{1}{9}OH^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ [**3**; 572, p. 60], $GD = \dfrac{1}{3}m_a$, $OD = R|\cos A|$, prin înlocuire obţinem:

$$\begin{aligned} R^2 + \left[R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\right] &= \frac{1}{9}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right) + 2R^2\cos^2 A \Leftrightarrow \\ 2R^2\sin^2 A - \frac{2}{9}\left(b^2+c^2\right) - \frac{1}{18}a^2 &= 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - \frac{2}{9}\left(b^2+c^2\right) - \frac{1}{18}a^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2a^2 &= b^2+c^2, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

În cazul punctului O, unghiul $\widehat{BOC}$ are ca măsură $2A$, dacă unghiul $\widehat{A}$ este ascuţit şi $360^0 - 2A$, dacă $\widehat{A}$ este obtuz. Ca urmare, pot fi date trei soluţii – de tipul celor prezentate pentru punctul I.

Propoziţia 4. *Dacă triunghiul OBC are aceeaşi rază a cercului circumscris ca şi triunghiul ABC, i.e. $R_{OBC} = R$, atunci* $A = 60^0$ sau $A = 120^0$.

Soluţia 1 (*sintetică*). Evident, ipoteza implică faptul că $O \in \mathcal{C}_1$.

Dacă $\widehat{A}$ este ascuţit (Fig. 3a), atunci O este interior triunghiului ABC. Centrul O_1, simetric cu O faţă de BC, se află pe arcul BC al cercului $\mathcal{C}$ care nu conţine vârful A, în mijlocul său. Din simetria faţă de BC, avem: $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BO_1C})$. Dar $m(\widehat{BOC}) = 2A$, iar $m(\widehat{BO_1C}) = 180^0 - A$. Rezultă că $180^0 - A = 2A$, deci $A = 60^0$.

Dacă $\widehat{A}$ este obtuz (Fig. 3b), relaţia $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BO_1C})$ rămâne valabilă, dar, în acest caz, $m(\widehat{BOC}) = 360^0 - 2A$ şi $m(\widehat{BO_1C}) = A$. Suntem conduşi la ecuaţia $360^0 - 2A = A$, de unde $A = 120^0$, ceea ce încheie demonstraţia.

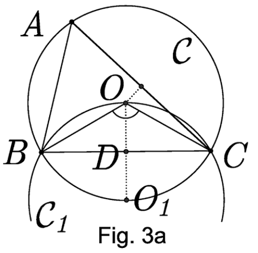

Fig. 3a

Soluţia 2 (*trigonometrică*). Cu teorema sinusurilor, condiţia $R_{OBC} = R$ este echivalentă cu $\dfrac{a}{2\sin\widehat{BOC}} = \dfrac{a}{2\sin A}$, echivalent cu $\sin\widehat{BOC} = \sin A$. Dacă $\widehat{A}$ este ascuţit, această ecuaţie se scrie $\sin 2A = \sin A$, adică $2\cos A = 1$ şi rezultă că $A = 60^0$. Dacă $\widehat{A}$ este obtuz, ecuaţia devine $\sin(2\pi - 2A) = \sin A$, adică $-\sin 2A = \sin A$ sau $-2\cos A = 1$ şi, în final, avem $A = 120^0$.

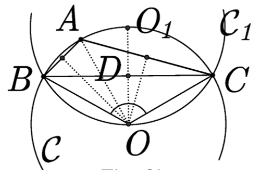

Fig. 3b

Soluţia 3 (*calculatorie*). Faptul că $O \in \mathcal{C}_1$ sau $(O_1 \in \mathcal{C})$ se exprimă simplu: $OO_1 = R$. Deoarece $OO_1 = 2OD$ şi $OD = R|\cos A|$, obţinem ecuaţia $2|\cos A| = 1$, de unde $A = 60^0$ sau $A = 120^0$.

Observaţii. 1) Propoziţiile 2, 3, 4 admit reciproce valabile, obţinute direct sau parcurgand calea inversă în unele dintre soluţiile de mai sus.

2) Se poate continua pe linia de mai sus şi cu alte puncte: Γ (Gergonne), N (Nagel), K (Lemoine), T (Torricelli) ş.a. De exemplu, în cazul punctului T, din faptul că $\mathrm{m}(\widehat{BTC}) = 120^0$ decurge imediat că $A = 60^0$. Pentru Γ, N, K se va încerca o soluţie calculatorie.

3) Problema a doua din lista de probleme prezentată la începutul Notei este ,,rudă apropiată" cu prima şi, în mod firesc, se abordează cu aceleaşi mijloace. Rămâne de văzut dacă dificultăţile de calcul pot fi depăşite uşor.

4) Problemele 3 şi 4 din listă au – multe dintre ele! – legătură cu paralelismul dreptelor OH, OI, HI, GI cu BC; condiţiile de realizare a fiecăruia în parte dintre aceste paralelisme se găsesc în *Problema II.50,* p. 65 din [**3**].

5) A cincea problemă conduce la calcule dificile; obţinerea unor rezultate ar fi interesantă.

Bibliografie

1. D. Brânzei, N. Gheorghiu *et al.* – *Matematici elementare. Probleme de sinteză*, Junimea, Iaşi, 1983.

2. T. Lalescu– *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.

3. Gh. Ţiţeica – *Culegere de probleme de geometrie*, ed. a III-a, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.

Recreaţii ... matematice

(*Răspuns la problema de la p. 104*)

O rezolvare posibilă:

$$\int_0^h 0!dx \cdot \int_0^a 0!dy \cdot \int_0^p 0!dz \cdot \int_0^\pi 0!dt = hap\pi\ (happy).$$