Obţinerea relaţiei de recurenţă pentru un anumit şir de integrale definite

Andrei VERNESCU[1]

Abstract. We give a unitary method to obtain the recurrence relation for a certain sequence of definite integrals of the n-th power of some positive quadratic functions, in some special conditions.

Keywords: sequences of integrals, formula of Wallis.

MSC 2010: 26A06, 26A42.

1. Introducere. Să considerăm şirurile de integrale definite (clasice) de termen general

$$A_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx, \tag{19}$$

$$B_n = \int_{0}^{2} \left(2x - x^2\right)^n dx, \tag{20}$$

$$C_n = \int_{0}^{1} \left(x - x^2\right)^n dx, \tag{21}$$

pentru care se caută obţinerea unei relaţii de recurenţă (pe baza integrării prin părţi).

Vom arăta cum rezolvarea tuturor acestor trei probleme se poate reduce la folosirea integralelor implicate în demonstrarea formulei lui Wallis (numite din acest motiv *integralele lui Wallis*). Vom prezenta şi o generalizare naturală sugerată de cele trei probleme. Toate funcţiile de gradul al doilea care apar în integralele considerate au coeficientul dominant negativ iar ca interval de integrare tocmai intervalul rădăcinilor, fiind deci pozitive pe acest interval.

2. Preliminarii. Reamintim că *integralele lui Wallis* sunt definite de formulele

$$I_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx, \tag{22}$$

pentru care, prin schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - x$, se obţine egalitatea

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x dx. \tag{23}$$

[1] Conf.univ.dr., Universitatea Valahia Târgovişte; *avernescu@gmail.com*

Primii doi termeni ai şirului de integrale sunt $I_0 = \frac{\pi}{2}$ şi $I_1 = 1$. Are loc binecunoscuta relaţie de recurenţă de ordinul 2, cu coeficienţi variabili:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{24}$$

Observaţie. Pe baza relaţiei de recurenţă (6), se obţine

$$I_{2n} = \Omega_n \, \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{1}{\Omega_n} \cdot \frac{1}{2n+1}, \tag{25}$$

unde, pentru prescurtare, am folosit notaţia

$$\Omega_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}. \tag{26}$$

Legat de formulele (7), trebuie să mai menţionăm că, folosind inegalitatea

$$0 < \Omega_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

demonstrabilă elementar, se obţine, pe baza criteriului majorării, că şirul $(\Omega_n)_n$ este convergent către zero, deci, din (7), decurge că subşirul $(I_{2n})_n$ este şi el convergent către 0. De asemenea, tot din (7) şi folosind partea stângă a dublei inegalităţi mai complete

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \Omega_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \tag{27}$$

de asemenea demonstrabilă elementar, rezultă, tot pe baza criteriului majorării, că şi subşirul $(I_{2n+1})_n$ este convergent către limita 0. Aşadar, întregul şir $(I_n)_n$ este convergent la 0.

Şirul $(\Omega_n)_n$ are proprietăţi şi utilizări interesante în analiza matematică, care însă nu fac obiectul acestui articol. Precizăm că notaţia a fost introdusă în [**3**] şi „consacrată" în [**4**].

3. Obţinerea rezultatelor. Să începem cu integralele din (1). Folosind o proprietate binecunoscută a integralei unei funcţii continue şi pare pe un interval simetric faţă de origine, obţinem:

$$A_n = 2\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx.$$

Efectuăm acum schimbarea de variabilă $x = \sin t$ şi obţinem că

$$A_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = 2I_{2n+1}.$$

Această formulă, împreună cu relaţia de recurenţă (6), ne dă

$$A_{n+1} = 2I_{2n+3} = 2\frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} A_n,$$

adică, în definitiv,

$$A_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} A_n. \tag{28}$$

Pentru integralele din (2), observăm că graficul funcţiei de gradul al doilea $x \longmapsto 2x - x^2$ are ca axă de simetrie dreapta de ecuaţie $x = 1$ şi, pentru a introduce o funcţie pară, efectuăm schimbarea de variabilă $x = 1 + u$. Se obţine

$$B_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - u^2\right)^n du = A_n,$$

de unde decurge relaţia de recurenţă căutată pentru B_n, aceeaşi ca şi pentru A_n.

Să trecem la integralele din (3). Graficul funcţiei de gradul al doilea $x \longmapsto 2x - x^2$ are ca axă de simetrie dreapta de ecuaţie $x = \frac{1}{2}$, deci notând $x = \frac{1}{2} + u$, obţinem:

$$C_n = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{4} - u^2\right) du = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}\left(1 - s^2\right)\right)^n ds = \frac{1}{4^n} A_n$$

(unde am folosit şi schimbarea de variabilă $u = \frac{s}{2}$), adică

$$C_n = \frac{1}{4^n} A_n.$$

Această formulă, împreună cu relaţia de recurenţă (10), ne dă

$$C_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}} A_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{2n+2}{2n+3} A_n = \frac{1}{4} \frac{2n+2}{2n+3} \left(\frac{1}{4^n} A_n\right) = \frac{n+1}{2\,(2n+3)} C_n,$$

adică

$$C_{n+1} = \frac{n+1}{2\,(2n+3)} C_n. \tag{29}$$

4. Cazul general. Să considerăm acum şirul de integrale $(J_n)_n$ definit de formula

$$J_n = \int_{p-r}^{p+r} \left[-x^2 + 2px - \left(p^2 - r^2\right)\right]^n dx, \tag{30}$$

unde p şi r sunt două numere reale fixate, $p \neq 0$, $r > 0$, iar $n = 0, 1, 2, ...$

Ne propunem să obţinem relaţia de recurenţă pe care o satisfac aceste integrale. Funcţia de gradul al doilea $x \longrightarrow f(x) = -x^2 + 2px - \left(p^2 - r^2\right)$ are drept rădăcini $p - r$ şi $p + r$, este pozitivă pe intervalul $[p - r, p + r]$, graficul său admite ca axă de simetrie dreapta de ecuaţie $x = p$, iar formula funcţiei se poate scrie sub forma canonică $f(x) = -\left[(x-p)^2 - r^2\right]$. Pentru găsirea relaţiei de recurenţă, parcurgem următorii paşi:

a) Efectuăm schimbarea de varibilă $x = p + u$ prin care integrala devine

$$J_n = \int_{-r}^{r} \left(r^2 - u^2\right)^n du.$$

b) Aplicăm proprietatea integralei unei funcţii pare pe un interval simetric:

$$J_n = 2\int_{0}^{r} \left(r^2 - u^2\right)^n du.$$

c) Aducem integrala pe intervalul $[0, 1]$ prin schimbarea de variabilă $u = rs$, deci

$$J_n = 2r^{2n+1} \int_{0}^{1} \left(1 - s^2\right)^{2n} ds.$$

d) Integrala la care am ajuns este A_n. Pentru a nu trebui să reţinem relaţia de recurenţă şi pentru aceste integrale, ci doar pe cea a integralelor lui Wallis, efectuăm o ultimă schimbare de variabilă, $s = \sin t$, care face să apară integrala lui Wallis I_{2n+1}:

$$J_n = 2r^{2n+1} \cdot (2I_n) = 4r^{2n+1} I_n.$$

În final, utilizarea relaţiei de recurenţă a integralelor lui Wallis duce la rezultat.

Observaţie. În baza ultimei formule, se poate stabili şi convergenţa, respectiv divergenţa şirului $(J_n)_n$, anume: dacă $r \leq 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$, iar dacă , $r > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \infty$.

5. Comentarii. O primă schiţă de abordare a rezolvării prezentate aici, dar foarte scurtă şi cu alte notaţii, a apărut a apărut în GM-A 1/2009, pp. 81-83, constând în câteva comentarii la problema 258 din GM-A nr. 1/2008, pag. 64. Ea mai fusese propusă, dar cu alte cerinţe, în varianta 22, subiectul IV, bacalaureat 2006. În acele comentarii se menţionează că, reducerea la integralele lui Wallis poate fi aplicată pentru integralele

$$I_n^{(a,b)} = \int_a^b \left(-x^2 + (a+b)\,x - ab\right)^n dx, \quad J_n^{(a,b)} = \int_a^b \left(-x^2 - (a+b)\,x - ab\right)^{n+1/2} dx.$$

Stabilirea relaţiei (6), a formulelor (7), cât şi deducerea formulei lui Wallis, pot fi găsite, de exemplu, în [**2**]. Un articol interesant din punct de vedere istoric, în care se redă raţionamentul fără integralele lui Wallis din [**5**], îl constituie [**1**].

Bibliografie

1. G. A. Dickinson – *Wallis product for $\frac{\pi}{2}$*, The Math. Gaz., XXI (1937), 135–139.

2. C. Iacob – *Lecţii de matematici superioare*, Bucureşti, Editura Tehnică, 1957.

3. A. Vernescu – *Ordinul de convergenţă al şirului din formula lui Wallis*, GM-A XII (1991), nr 1, 7-8.

4. A. Vernescu – *The Summation of a Family of Series*, Amer. Math.Monthly, 115, (2008), 939-943.

5. J. Wallis – *Arithmetica infinitorum*, Oxford, 1656.