Alte cazuri de congruenţă a triunghiurilor

Constantin CHIRILĂ[1]

Abstract. In this Note, a few cases of triangles′ congruence are presented in terms of the two radii R and r.

Keywords: inradius, circumradius, congruent triangles.

MSC 2010: 97A80.

Scopul acestei Note este de a vedea cum un elev cu aptitudini creative poate să găsească singur şi să finalizeze un subiect de cercetare sugerat de cunoştinţele de matematică dobândite în clasă.

Ne vom convinge de înţelepciunea vorbelor: *Lucrurile nu-s greu de făcut, ce este greu este să te pui în starea de a le face.*

Cu metoda triunghiurilor congruente elevul se întâlneşte de timpuriu, în cursul gimnazial. Cazurile studiate de congruenţă a triunghiurilor sunt codificate prin (LLL), (LUL) şi (ULU); cele de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice sunt şi ele codificate: (IC), (CC), (IU), (CU). Totul are aspectul de lucru bine făcut şi dus până la capăt.

Nu se mai poate face nimic?

În momentul în care distinct de laturi şi unghiuri se introduc şi se studiază noi elemente ale triunghiului (înălţimi, mediane, bisectoare, razele cercurilor înscris şi circumscris etc), apare şi posibilitatea considerării unor noi cazuri de congruenţă.

Elevul care nu a pierdut acea ,,*stare de uimire*", acel stăruitor ,,*de ce?*" avute la vârsta fragedă – pentru cultivarea cărora atât de patetic pleda acad. *Solomon Marcus* –, va găsi în acest cadru o sursă de subiecte de cercetare proprie.

Într-adevăr, un astfel de elev este capabil să-şi pună întrebarea: *Ce se întâmplă dacă în cazurile de congruenţă ce-i sunt cunoscute elementul L (latură) se înlocuieşte cu unul dintre elementele liniare amintite mai sus: înălţime, mediană etc ?*

Odată trasată calea, găsirea unor cazuri valabile de congruenţă a triunghiurilor nu mai comportă dificultăţi. Vom urma această cale în cazul în care L este înlocuit cu R sau r (notaţii obişnuite).

Propoziţia 1. (i) *Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ îndeplinesc condiţiile $R = R'$, $r = r'$, $A = A'$, atunci ele sunt congruente.*

(ii) *Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt ascuţitunghice şi îndeplinesc condiţiile $R = R'$, $r = r'$, $a = a'$, atunci ele sunt congruente.*

Demonstraţie. (i) Ţinând seama de ipoteze şi de formula $a = 2R\sin A$, avem:

$$a = 2R\sin A = 2R'\sin A' = a',$$

adică $a = a'$.

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Gabaret Ibrăileanu", Iaşi; *cdchirila02@yahoo.com*

Utilizând formula $p - a = r \operatorname{ctg} \dfrac{A}{2}$, obţinem în acelaşi fel că $p - a = p' - a'$ şi cum $a = a'$, deducem că $p = p'$. Apoi, pe baza formulei $S = pr$, deducem şi faptul că $S = S'$.

În sfârşit, deoarece $b + c = 2p - a$ şi $bc = \dfrac{2S}{\sin A}$, obţinem în aceeaşi manieră sistemul simetric de două ecuaţii

$$b + c = b' + c' \quad , \quad bc = b'c'.$$

Ca urmare, $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ verifică condiţiile $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ sau $a = a'$, $b = c'$, $c = b'$ şi, deci, sunt congruente în ambele situaţii(conform cazului (LLL)). De fapt, avem o unică situaţie, dacă facem abstracţie de orientarea triunghiurilor.

(ii) Relaţiile $R = R'$ şi $a = a'$ implică egalitatea $\sin A = \sin A'$. Cum triunghiurile sunt ascuţitunghice rezultă că $A = A'$. Se aplică partea (i) pentru a încheia.

Observaţie. Afirmaţia (ii) nu este valabilă în absenţa condiţiei suplimentare asupra triunghiurilor. Aceasta se datorează faptului că din $a = a'$ decurge $\sin A = \sin A'$, dar de aici nu rezultă că $A = A'$, ci doar faptul că $A = A'$ sau $A = \pi - A'$. Pe această constatare este construită Fig. 1, în care $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au $R = R'$,

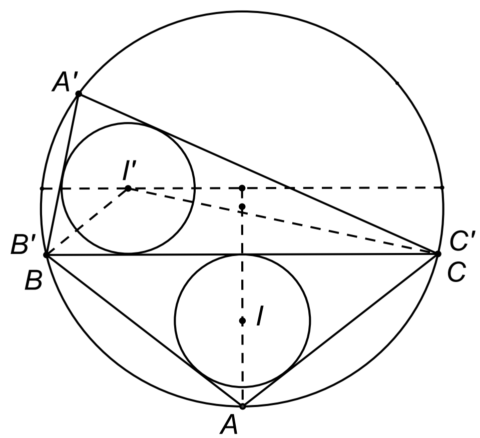

Fig. 1

$r = r'$, $a = a'$, dar nu sunt congruente: $A' = \pi - A$. Punctul I' este unul dintre punctele de intersecţie a paralelei dusă la distanţa r de BC cu arcul de cerc ce vede segmentul $B'C' \equiv BC$ sub un unghi egal cu $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{A}{2}$.

Propoziţia 2. (i) *Dacă $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ satisfac condiţiile $R = R'$, $B = B'$, $C = C'$, atunci ele sunt congruente.*

(ii) *Dacă $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ sunt ascuţitunghice şi asfel încât $R = R'$, $b = b'$, $c = c'$, atunci ele sunt congruente.*

Demonstraţie. (i) Evident, avem şi $A = A'$. Pe de altă parte, în ipotezele în care ne aflăm, cu teorema sinusurilor, obţinem că $b = b'$ şi $c = c'$. Conform cazului de congruenţă (LUL), rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

(ii) În ipotezele avute, relaţiile $b = b'$, $c = c'$ sunt echivalente cu $B = B'$, $C = C'$. Conform punctului (i) al propoziţiei, rezultă congruenţa triunghiurilor date.

Observaţie. La punctul (ii) al propoziţiei precedente, în lipsa cerinţei ca triunghiurile să fie ascuţitunghice, afirmaţia din concluzie nu mai este valabilă.

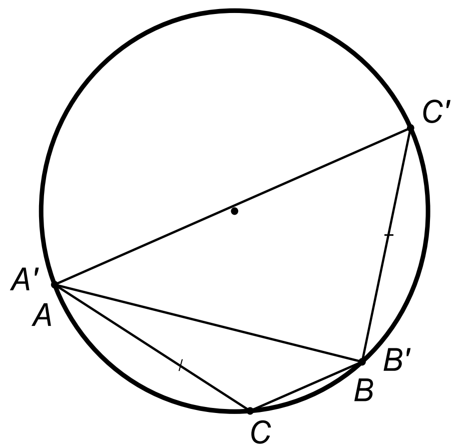

Fig. 2

În Fig. 2, triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au $R = R'$, $AB \equiv A'B'$ (latură comună) şi $AC \equiv B'C'$ (prin construcţie), dar nu sunt congruente.

Propoziţia 3. *Dacă $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ verifică condiţiile $r = r'$, $B = B'$ şi $C = C'$, atunci ele sunt congruente.*

Demostraţie. Evident, triunghiurile sunt asemenea. În plus, avem:

$$a = (p-b) + (p-c) = r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = r'\left(\operatorname{ctg}\frac{B'}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C'}{2}\right) = a',$$

adică $a = a'$. Ca urmare, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Observaţie. Condiţiile $r = r'$, $b = b'$ şi $c = c'$ nu implică congruenţa triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$, după cum arată exemplu următor:

În Fig. 3, $\triangle ABC$ este echilateral de latură l (deci $r = \frac{\sqrt{3}}{6}l$), iar $\triangle A'B'C'$ este luat isoscel cu $A'B' = A'C' = l$ şi se caută unghiul α asfel încât $r' = \frac{\sqrt{3}}{6}l$.

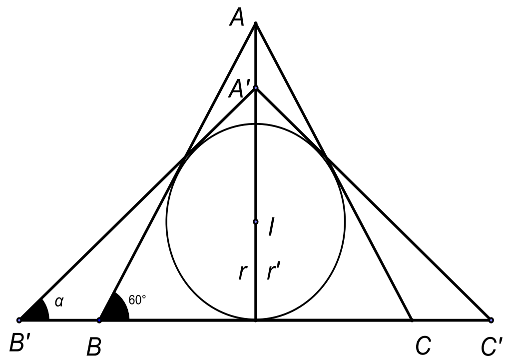

Fig. 3

Cum $r' = \dfrac{S'}{p'} = \dfrac{l^2 \sin\alpha\cos\alpha}{l(1+\cos\alpha)}$, condiţia $r = r'$ ne conduce la următoarea ecuaţie trigonometrică pentru α :

$$6\sin\alpha\cos\alpha - \sqrt{3}(1+\cos\alpha) = 0.$$

Notăm cu $f(\alpha)$ membrul întâi al acestei ecuaţii şi observăm că $f(\frac{\pi}{6})<0$ şi $f(\frac{\pi}{4})>0$. Ca urmare, există o soluţie $\alpha\in(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$. Evident, triunghiul isoscel $A'B'C'$ cu $B'=C'=\alpha$ este obtuzunghic, deci nu-i congruent cu $\triangle ABC$. Aşadar, afirmaţia este justificată.

Cele prezentate mai sus ne îndeamnă să examinăm cu prudenţă cazurile de congruenţă pe care le avem în vedere. Nu ne propunem să antrenăm şi alte elemente ale triunghiului (mediane, bisectoare etc) pentru a obţine noi cazuri de congruenţă.

Antrenând tot razele R şi r vom mai formula câteva cazuri, unele valabile şi altele nu:

1. Dacă $R = R'$, $a = a'$ şi $A = A'$, nu putem afirma că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$; într-adevăr, luând o coardă $BC \equiv B'C'$ într-un cerc de rază $R = R'$, există o infinitate de triunghiuri ABC înscrise în unul dintre arcele determinate de coarda BC şi care sunt necongruente.

2. Dacă $r = r'$, $a = a'$ şi $A = A'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ căci avem $R = R'$ (din teorema sinusurilor) şi,ca urmare, suntem în ipotezele Propoziţiei 1,(i).

3. Dacă $R = R'$, $a = a'$ şi $B = B'$, obţinem imediat că $b = b'$ (din teorema sinusurilor) şi conform cazului (LUL) rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

4. Dacă $r = r'$, $a = a'$ şi $B = B'$, putem utiliza formula $a = r\left(\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}\right)$ pentru a obţine $C = C'$ şi a ne situa în condiţiile cazului (ULU); vom avea că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

În final, menţionăm faptul că, deşi aceste cazuri de congruenţă a triunghiurilor nu sunt de importanţa celor clasice, în contextul unor probleme complexe, aceste cazuri ar putea oferi o rezolvare mai elegantă şi simplă.