O ,,demonstraţie" a inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz folosind inegalitatea lui Cebâşev !

Titu ZVONARU[1]***, Neculai STANCIU*** [2]

Abstract. The authors signal out a case of incorrected application of Chebyshev′s inequality.
Keywords: Cauchy-Bouniakovski-Schwarz inequality, Chebyshev′s inequality.

MSC 2010: 97H30.

Pentru implicaţia Cebâşev $\Rightarrow$ (CBS), avem în vedere următoarea ,,**Demonstraţie**". Dacă $a \geq b \geq c$ şi $x \leq y \leq z$, atunci aplicând inegalitatea lui Cebâşev, rezultă că

$$\begin{aligned}(ax+by+cz)^2 &\leq \left(\frac{1}{3}(a+b+c)(x+y+z)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \cdot \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \\ &\leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

pentru ultima parte folosindu-se inegalitatea $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$. Ca urmare,

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2),$$

adică exact inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (CBS).

,,Demonstraţia" prezentată este greşită! Pentru a aplica *Cebâşev* unei expresii de forma $ax+by+cz$, trebuie ca (a,b,c) şi (x,y,z) să fie ordonate. De cele mai multe ori putem presupune fără probleme că $a \geq b \geq c$. Nu presupunerea în sine e o greşeală, ci modul de a o folosi. Dacă din această presupunere rezultă că $x \geq y \geq z$ sau $x \leq y \leq z$, putem aplica *Cebâşev*. Dacă din presupunerea $a \geq b \geq c$ nu rezultă nimic despre x, y, z, nu putem aplica Cebâşev. Altfel spus: ,,*Demonstraţia*" este valabilă doar când cel mai mare dintre a, b, c este cuplat cu cel mai mare dintre x, y, z, cel mijlociu cu cel mijlociu şi cel mai mic cu cel mai mic (sau cel mai mare cu cel mai mic, cel mijlociu cu cel mijlociu şi cel mai mic cu cel mai mare). Ce se întâmplă dacă nu este aşa?

Un exemplu (pentru a fi mai clari). Să se demonstreze că

$$3(ax+by+cz) \geq (a+b+c)(x+y+z).$$

,,*Demonstraţie*". Presupunem că $a \geq b \geq c$ şi $x \geq y \geq z$. Aplicăm Cebâşev şi gata.

Să luăm de bună inegalitatea tocmai ,,demonstrată" (deoarece am spus că putem face aceste presupuneri fără a afecta generalitatea). În acest caz, dacă luăm $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $x = 2$, $y = 5$, $z = 2$, avem: $39 \geq 45$!!!

[1]Comăneşti; *tzvonaru@yahoo.com*

[2]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,George Emil Palade", Buzău; *stanciuneculai@yahoo.com*

Observaţie. S-a mai făcut (intenţionat!) aceeaşi greşeală când s-a demonstrat mai sus CBS folosind *Cebâşev*.

Observaţie. Cele de mai sus nu înseamnă că problemele nu sunt adevărate, ci doar că, uneori, soluţiile nu sunt corecte (vezi, de exemplu: problema 5317 din SSM `http://www.ssma.org/Websites/ssma/images/Jan-15_(final_copy).pdf` cu comentariul la adresa `http://www.ssma.org/Websites/ssma/images/Feb-15(finalcopy).pdf` şi problema 1007 din CMJ, Sept. 2014, No.4).

Să exemplificăm cu o demonstraţie corectă, folosind *Cebâşev*, a *inegalităţii lui Nesbitt*:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Într-adevăr, să presupunem că $a\geq b\geq c$; rezultă că $\dfrac{1}{b+c}\geq\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{1}{a+b}$. Aplicând inegalitatea lui *Cebâşev* şi apoi inegalitatea (CBS) avem

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\overset{(CBS)}{\geq}\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}((a+b)+(b+c)+(c+a))\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\overset{(CBS)}{\geq}$$
$$\overset{(CBS)}{\geq}\frac{1}{6}\cdot 3^2=\frac{3}{2}.$$

Recreaţii ... matematice

Binomul lui Newton sub formă de determinant.

Fie $x,a\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Are loc formula

$$\text{(N)}\qquad (x+a)^n=\begin{vmatrix} x^n & -a & -ax & \dots\dots\dots & -ax^{n-1}\\ x^{n-1} & 1 & -a & \dots\dots\dots & -ax^{n-2}\\ x^{n-2} & 0 & 1 & \dots\dots\dots & -ax^{n-3}\\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\\ x & 0 & 0 & \dots\dots\dots & -a\\ 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 1\end{vmatrix}$$

Formula (N) poate fi demonstrată prin inducţie matematică. Formula şi o altă demonstraţie sunt prezente în *Recreaţii Ştiinţifice,* vol. II (1884), pp. 9-11, unde se spune că *,,Această chestiune este tractată de D. Marchand în Journal de Mathématiques, Bourget et de Longchamps, anul 1883, pag. 248 şi următoarele."*

(*continuare la p. 129*)