Cercul celor nouă puncte (Euler) – sursă de noi probleme

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. Using the the nine-point circle (Euler′s circle) as a pretext, the author aims to suggest to pupils a way in which they could find their own research topic by themselves.

Keywords: nine-point circle, incircle, circumcicle, duality.

MSC 2010: 51M04.

Nota de faţă se adresează elevilor de gimnaziu şi liceu pasionaţi de matematică şi îşi propune să le arate cum, doar cu cunoştinţele dobândite în clasă, îşi pot găsi singuri un subiect de cercetare şi cum să-şi conducă apoi munca de obţinere a unor rezultate noi.

În revistele de matematică, elevul găseşte în mod frecvent comentarii, generalizări sau studii relativ la unele inegalităţi algebrice, unele teoreme de geometrie etc. întâlnite de el în manualele şcolare (de exemplu, generalizări ale inegalităţii mediilor sau ale teoremei lui Ceva etc.).

Vom folosi ca punct de pornire şi inspiraţie *cercul celor nouă puncte* (*cercul lui Euler*), o adevărată ,,vedetă" a geometriei triunghiului. În scopul propus, vom proceda astfel:

I. revedem cunoştinţele avute despre cercul lui Euler;
II. ,,demontăm" acest obiect şi propriităţile sale în ,,componente" (vom vedea mai târziu ce semnficaţie au cuvintele puse în ghilimele);
III. examinăm ,,piesele" obţinute şi apoi formulăm propriile noastre ,,obiecte" relativ la care ne propunem să abordăm un număr de ,,chestiuni" (evident, acestea ne sunt sugerate de obiectul de pornire - cercul lui Euler);
IV. căutăm să dăm răspuns (pozitiv sau negativ) măcar la o parte dintre chestiunile puse sau care apar între timp (eliminăm chestiunile formulate greşit, iar pe cele ,,rebele" le amânăm sau apelăm la un sprijin binevoitor);
V. redactăm Nota cu rezultatele obţinute, cu grija ca ea să fie clară şi bine argumentată (întregim cu ,,verigile": lipsă pe care, eventual, le constatăm).

Dat un triunghi ABC, cercul celor nouă puncte (cercul lui Euler) asociat triunghiului este cercul determinat de mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor AH, BH şi CH ale triunghiului (notaţiile $O, H, I, R, r, \mathcal{C}(O, R), \mathcal{C}(I, r)$ etc. sunt cele uzuale).

În privinţa poziţiei lui faţă de cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(I, r)$, amintim următoarele proprietăţi:

[1] Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.ro*

• centrul cercului lui Euler, notat O_9, este mijlocul segmentului OH, iar pentru raza sa, notată R_9, avem: $R_9 = \dfrac{R}{2}$ şi $r \leq R_9 < R$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral);

• cercul lui Euler, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$, se află în interiorul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ sau este secant cu acesta, după cum $\triangle ABC$ este ascuţitunghic sau obtuzunghic; în cazul în care $\triangle ABC$ este dreptunghic, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}(O, R)$ în vârful unghiului drept;

• cercul $\mathcal{C}(I, r)$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ (într-un punct numit punctul lui Feurbach).

În privinţa poziţiei cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ faţă de $\triangle ABC$, amintim:

• dacă $\triangle ABC$ este ascuţiunghic $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ intersectează laturile sale în puncte interioare lor;

• dacă $\triangle ABC$ este obtuzunghic, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ intersectează latura mare în puncte interioare, iar pe celelalte două în câte un punct interior şi unul exterior laturii respective;

• dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ intersectează ipotenuza în două puncte interioare, trece prin vârful unghiului drept, iar catetele mai sunt intersectate în câte un punct interior lor.

Nu continuăm cu alte proprietăţi ale cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$, avem deja suficient material pentru reflecţie, care să ,,aprindă" ideile de început ale viitoarei Note. Au ieşit în evidenţă anumite elemente şi raporturi între ele: segmentele interceptate de $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ pe laturi, poziţia acestuia faţă de $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(I, r)$, poziţia centrului O_9, raportul razei R_9 faţă de R şi r. A venit momentul de ,,naştere" a Notei.

Reluând definiţia cercului lui Euler, vedem că acesta interceptează pe laturi segmente bine determinate – ele având ca extremităţi picioare de înălţimi şi mediane. Ce se întâmplă dacă modificăm această restricţie asupra segmentelor interceptate? De exemplu, dacă am considera că ele sunt situate în interiorul laturilor sau includ laturile sau conţin picioarele înălţimilor dar nu şi pe cele ale medianelor etc.

Referindu-ne la proprietăţile cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ de mai sus, putem considera, în mod formal, alte cercuri şi clase de cercuri. De exemplu, faptul că O_9 este mijlocul lui OH şi are raza $\dfrac{R}{2}$ ne poate sugera să considerăm cercuri cu centrele pe OH şi care împart OH în segmente aflate în raportul k iar razele lor să fie egale cu $\dfrac{R}{k}$ sau să vedem ce revine tringhiului ABC dacă O_9 ar fi şi pe cercul $\mathcal{C}(I, r)$ sau pe alt cerc/dreaptă. Dacă ne-am referi la poziţia cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ faţă de vârfurile A, B, C sau la unele proprietăţi de tangenţă enunţate mai sus, am avea prilejul să formulăm noi întrebări.

Urmează o etapă de selecţie în care să reţinem pentru cercetare două-trei dintre chestiunile formulate, cele mai interesante, accesibile şi care corespund gustului nostru.

Pentru continuarea discuţiei am reţinut următoarea chestiune:

Fie dat un triunghi ABC ascuţitunghic. Să considerăm familia de cercuri $\mathcal{C}(O', R')$ *care au proprietatea următoare:*

(P) *cercul* $\mathcal{C}(O', R')$ *intersectează laturile triunghiului în interiorul lor.*

Să se vadă dacă au loc inegalităţile $r \leq R' < R$.

Menţionăm mai întâi că triunghiul ABC este luat ascuţiunghic în concordanţă cu faptul că această formă este impusă de cercul lui Euler asociat lui, care are proprietatea (P). Observăm că cercurile $\mathcal{C}(O,R)$ şi $\mathcal{C}(I,r)$ nu au proprietatea (P), dar apar ca situaţii limită în care segmentele MN, PQ şi RS (fig. 1) se extind la laturi sau se restrâng la puncte (de tangenţă). Aşadar, cercurile $\mathcal{C}(O',R')$ sunt ,,intermediare" în raport cu $\mathcal{C}(I,r)$ şi $\mathcal{C}(O,R)$, iar cercul lui Euler este printre ele. În prima inegalitate din enunţ putem avea egalitate, aşa cum se întâmpla în cazul cercului Euler asociat unui triunghi echilateral. Vom prezenta două soluţii pentru a stabili că inegalităţile propuse au loc.

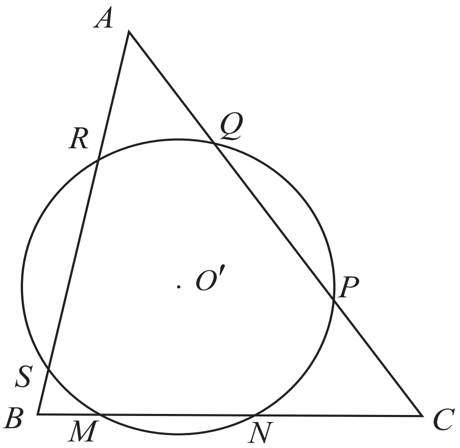

Fig.1

Soluţia 1. *Inegalitatea $R' < R$.* Triunghiul ABC fiind ascuţiunghic, punctele O şi O' sunt în interiorul său.

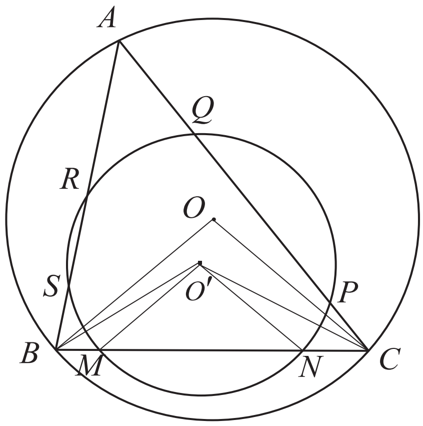

Fig.2

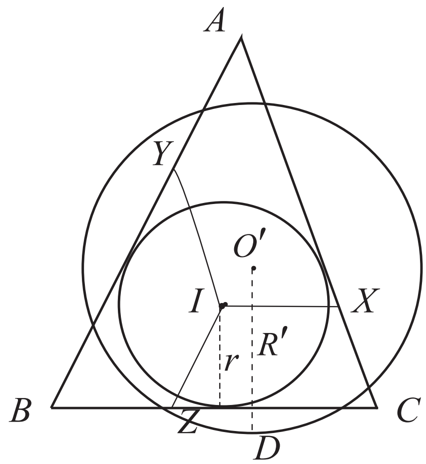

Fig. 3

Evident, O' este situat în unul dintre triunghiurile OAB, OBC şi OCA, fie el OBC ca în fig. 2. Unim O' cu vârfurile B, C şi punctele M, N. Avem: $O'M + O'N < O'B + O'C < OB + OC$, de unde $2O'M < 2OB$, adică $R' < R$.

Inegalitatea $R' \geq r$. Ducem semidreptele IX, IY şi IZ paralele cu BC, CA, respectiv AB (fig. 3). Dacă $IXAY$ este patrulaterul care conţine centrul O', atunci raza $O'D$ a cercului $\mathcal{C}(O',R')$ perpendiculară pe dreptele BC şi IX este mai mare decât distanţa dintre ele, adică decât r, ceea ce încheie demonstraţia.

Făcând apel la dualitatea: vârf-latură, mediatoare-bisectoare, O-I, cerc circumscris-cerc înscris, cerc printr-un vârf - cerc tangent la o latură etc., putem reduce stabilirea inegalităţii $r \leq R' < R$ la stabilirea părţii drepte $R' < R$. Chiar dacă această cale nu este mai simplă, o astfel de soluţie merită atenţie.

Soluţia 2. *Inegalitatea* $R' < R$. Este uşor de văzut că vârfurile A, B, C sunt puncte exterioare cercului $\mathcal{C}(O', R')$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $O'A < O'B < O'C$ (fig. 4). Parcurgem trei etape.

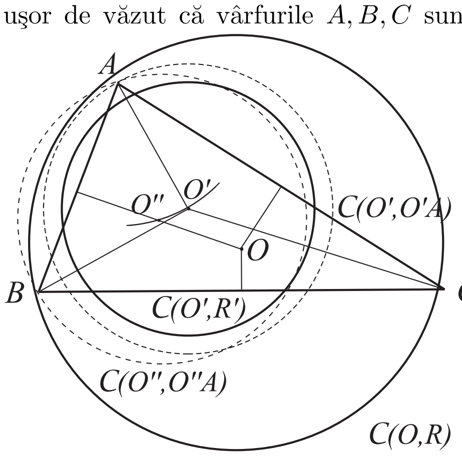

Fig.4

1) Considerăm cercul $\mathcal{C}(O', O'A)$ concentric cu $\mathcal{C}(O', R')$, care trece prin vârful A şi lasă în exterior vârfurile B şi C.

2) Considerăm punctul O'' astfel încât $O''A = O''B = O'A$; el este punctul de intersecţie a mediatoarei laturii AB cu cercul $\mathcal{C}(A, AO')$ şi situat în interiorul triunghiului. Cercul $\mathcal{C}(O'', O''A)$ are raza egală cu a cercului $\mathcal{C}(O', O'A)$ şi trece prin vârfurile A şi B (putem spune că $\mathcal{C}(O'', O''A)$ se obţine deplasând cercul $\mathcal{C}(O', O'A)$ astfel încât să treacă şi prin vârful B).

Punctul C se află în exteriorul cercului $\mathcal{C}(O'', O''A)$. Într-adevăr, din faptul că $O'B < O'C$ rezultă că punctul O' este de partea mediatoarei laturii BC în care se află B. Pe de altă parte, O'' este situat în unghiul $\widehat{AO'B}$ (după cum rezultă din $O'A < O'B$ şi modul cum a fost consturit O''). Ca urmare, O'' se află, ca şi O', de partea mediatoarei laturii BC ce conţine vârful B. Aşadar, $O''B < O''C$, adică C este exterior faţă de $\mathcal{C}(O'', O''A)$.

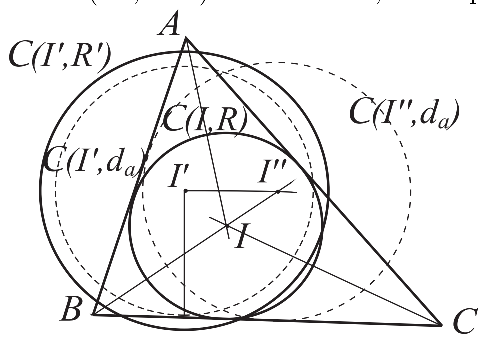

Fig. 5

3) În sfârşit, mişcând punctul O'' pe mediatoarea laturii AB până ce ajunge în O – centrul cercului circumscris –, cercul $\mathcal{C}(O'', O''A)$ se măreşte treptat şi în final coincide cu cercul $\mathcal{C}(O, R)$.

Urmărind razele cercurilor ce apar în etapele parcurse, avem: $R' < O'A = O''A < R$, deci $R' < R$.

Inegalitatea $r < R'$. Se parcurg etapele de mai sus, procedând prin dualitate. Fie $\mathcal{C}(I', R')$ un cerc cu proprietatea (P). Să notăm cu d_a, d_b, d_c distanţele punctului I' la laturile BC, CA, respectiv AB şi să presupunem că $d_a > d_b > d_c$ (fig. 5). Se realizează, prin dualitate, trecerile: $\mathcal{C}(I', R') \to \mathcal{C}(I', d_a) \to \mathcal{C}(I'', d_a) \to \mathcal{C}(I, r)$ (a se urmări fig. 5). În prima trecere cercul dat este restrâns la un cerc concentric tangent la o latură, în a doua se menţine mărimea cercului şi se obţine un cerc tangent la două laturi (centrul I'' este intersecţia bisectoarei unghiului B cu paralela prin I' la latura BC) şi în a treia se obţine cercul tangent la toate laturile, adică cercul înscris

$\mathcal{C}(I, r)$.

Evident, între razele acestor cercuri avem: $R' > d_a > r$, deci $R' > r$, ceea ce încheie demonstraţia.

Nu am fost preocupaţi de epuizarea subiectului ales. Scopul urmărit a fost să arate elevului cu aptitudini pentru matematică cum se concepe o Notă. Au rămas destule lucruri de făcut; de exemplu, se pot dovedi uşor afirmaţiile:

1) *dacă un poligon convex este înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ şi centrul O este în interiorul poligonului, iar $\mathcal{C}(O', R')$ este un cerc cu proprietatea (P) relativ la poligon, atunci $R' < R$;*

2) *dacă un cerc $\mathcal{C}(O', R')$ are proprietatea (P) şi segmentele determinate pe laturile triunghiului conţin picioarele înălţimilor şi medianelor corespunătoare lor, atunci $R' > \frac{R}{2}$.*

Trebuie procedat cu atenţie, pentru că răspunsul la o problemă pe care ne-o propunem poate fi şi negativ. Astfel, dacă cercul $\mathcal{C}(O', R')$ are proprietatea (P), atunci după cum am văzut, avem că $r \leq R' < R$, dar nu putem afirma că $\mathcal{C}(O', R')$ este inclus în interiorul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ şi nici că $\mathcal{C}(I, r)$ este inclus în interiorul lui $\mathcal{C}(O', R')$.

Recreaţii ... matematice

(*continuarea ,,recreaţiei" de la p.124*)

Demonstraţia formulei binomului lui Newton.

Pornim de la identitatea $y^{n+1} - x^{n+1} = (y - x)(y^n + xy^{n-1} + ... + x^{n-1}y + x^n)$. Punând aici $y = x + a$ sau $y - x = a$, deducem că $y^{n+1} - ay^n - axy^{n-1} - ... - ax^{n-1}y = x^{n+1} + ax^n$. Această egalitate şi cele obţinute trecând pe n în $n-1, n-2, ..., 0$ formează următorul sistem de ecuaţii în necunoscutele $y^{n+1}, y^n, ..., y$:

$$\begin{cases} y^{n+1} - ay^n - axy^{n-1} - ... - ax^{n-1}y = x^n\,(x + a) \\ \qquad y^n - ay^{n-1} - ... - ax^{n-2}y = x^{n-1}\,(x + a) \\ \qquad\qquad \text{..} \\ \qquad\qquad\qquad y^2 - ay = x\,(x + a) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y = x + a \end{cases}.$$

Cum determinantul sistemului este egal cu 1, pentru necunoscuta y^{n+1} avem:

$$y^{n+1} = (x + a)^{n+1} = (x + a) \cdot \begin{vmatrix} x^n & -a & -ax & \text{...........} & -ax^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & -a & \text{...........} & -ax^{n-2} \\ x^{n-2} & 0 & 1 & \text{...........} & -ax^{n-3} \\ \text{......} & \text{....} & \text{....} & \text{...........} & \text{.......} \\ x & 0 & 0 & \text{...........} & -a \\ 1 & 0 & 0 & \text{...........} & 1 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă formula (N).