CHESTIUNI METODICE

Ce este mai simplu de utilizat: (CBS) sau (B)?

***Dumitru M. BĂTINEŢU-GIURGIU*[1], *Neculai STANCIU* [2]**

Abstract. The authors present some aspects concerning the Bergström inequality and some types of problems in which this inequality is used. They assert that the use of this inequality is more convenient than the use of Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Keywords: Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality, Bergström′s inequality.

MSC 2010: 97H30.

Între inegalităţile elementare uzuale, sunt binecunoscute implicaţiile şi echivalenţele următoare:

• *Minkovski* $\Rightarrow$ *Hölder* $\Leftrightarrow$ *Bernoulli* $\Leftrightarrow$ *Radon* $\Leftrightarrow$ *Bergström* (B) $\Leftrightarrow$
Cauchy-Buniakovski-Schwarz (CBS)
• *Jensen (Rogers)* $\Rightarrow$ *Hölder* $\Leftrightarrow$ *Bernoulli* $\Rightarrow$ *Radon* $\Rightarrow$ *Bergström* (B) $\Leftrightarrow$
Cauchy-Buniakovski-Schwarz (CBS)

Vom comenta mai jos modalitatea în care sunt rezolvate cel mai adesea problemele de un anumit tip, anume, cele pentru care este firesc să se utilizeze *inegalitatea lui H. Bergström* (B):

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x_k \in \mathbb{R}$ *şi* $y_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, *atunci*:

$$\text{(B)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k}.$$

De obicei, aceste probleme, pe care le vom numi de tip (B), sunt rezolvate aplicând inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS):

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a_k \in \mathbb{R}$ *şi* $b_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,n}$, *atunci*:

$$\text{(CBS)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Desigur, fiecare dintre aceste modalităţi este corectă, numai că prima (cu *Bergström*) este mai simplă, fiind naturală şi directă, în timp ce a doua (folosind CBS) este mai complicată, fiind o consecinţă ce trebuie explicată.

Remarca 1. Inegalitatea lui *Bergström* (B) se poate demonstra fără a folosi inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS) şi invers, inegalitatea (CBS) se poate dovedi fără a utiliza inegalitatea (B).

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Matei Basarab", Bucureşti
[2]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,George Emil Palade", Buzău; *stanciuneculai@yahoo.com*

Remarca 2. Inegalitatea (B) de mai sus este implicată de cea în care am considera ,,$x_k \in \mathbb{R}_+^*$" în loc de ,,$x_k \in \mathbb{R}$" (deci sunt echivalente). Demonstrăm acest fapt în trei paşi:

i) Dacă $x_k \in \mathbb{R}^*, \forall k = \overline{1,n}$, atunci avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{(|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k|)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k},$$

deci (B) este adevărată.

ii) Dacă $x_k = 0, \forall k = \overline{1,n}$, avem: $0 = 0$, adevărat.

iii) Dacă $m\,(m \in \mathbb{N}^*,\ m < n)$ dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nenule iar restul sunt nule, putem presupune (fără a restrânge generalitatea) că $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}_+^*$, iar $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$. În acest caz avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^2}{y_k} \overset{(B)}{\geq} \frac{(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k} = \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k},$$

deci (B) este demonstrată şi în acest caz.

Remarca 3. Inegalitatea (CBS) este implicată de cea în care am considera ,,$a_k, b_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$" în loc de ,,$a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,n}$" (deci sunt echivalente). Avem:

i) Dacă $a_k, b_k \in \mathbb{R}^*$, atunci:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2 = (\sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |b_k|)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2),$$

deci inegalitatea (CBS) este adevărată şi dacă printre a_k, b_k se găsesc unele negative.

ii) Dacă printre a_k, b_k sunt unele nule, fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a_k \in \mathbb{R}_+^*, k = \overline{1,m}$, $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_n = 0$ şi $b_k \in \mathbb{R}_+^*$, $k = \overline{1,p}$, $b_{p+1} = b_{p+2} = \ldots = b_n = 0$, unde $1 \leq p \leq m \leq n$.

Atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k b_k$ şi avem:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 = (\sum_{k=1}^{p} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{p} a_k^2)(\sum_{k=1}^{p} b_k^2) \leq (\sum_{k=1}^{m} a_k^2)(\sum_{k=1}^{p} b_k^2) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2).$$

Propoziţie. *Inegalităţile (B) şi (CBS) sunt echivalente.*

Demonstraţie. Putem considera că $a_k, b_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, conform remarcilor 2 şi 3.

(B)$\Rightarrow$(CBS) Dacă în (B) luăm $x_k = a_k b_k$ şi $y_k = b_k^2$, $\forall k = \overline{1,n}$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 b_k^2}{b_k^2} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2} \Rightarrow (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2) \geq (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2,$$

deci are loc (CBS).

(CBS)$\Rightarrow$(B) Dacă în inegalitatea (CBS) luăm $a_k = \sqrt{y_k}$ şi $b_k = \dfrac{x_k}{\sqrt{y_k}}$, $\forall k = \overline{1, n}$, rezultă că

$$(\sum_{k=1}^{n} y_k)(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k}) \geq (\sum_{k=1}^{n} \sqrt{y_k} \cdot \frac{x_k}{\sqrt{y_k}})^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k},$$

deci are loc (B).

Propoziţia precedentă pune în evidenţă faptul că orice problemă care se rezolvă cu inegalitatea (CBS) se poate rezolva şi cu inegalitatea (B), cât şi invers. Este firesc, însă, ca problemele de tip (B) să fie rezolvate cu inegalitatea lui Bergström.

În acest sens prezentăm o soluţie mult mai simplă decât cea dată în G.M.-B, nr. 11/2014, pentru o problemă propusă în G.M.-B, nr. 5/2014.

E:14666. *Se consideră numerele reale pozitive* a, b, c *şi* d *astfel încât* $a+b+c+d = 4$. *Arătaţi că* $\dfrac{a^2}{b+c+d} + \dfrac{b^2}{a+c+d} + \dfrac{c^2}{a+b+d} + \dfrac{d^2}{a+b+c} \geq \dfrac{4}{3}$.

(*Vasile Scurtu*)

Soluţie. Se aplică *inegalitatea lui Bergström*; obţinem:

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{a+c+d} + \frac{c^2}{a+b+d} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{3(a+b+c+d)} = \frac{4}{3}.$$

Acest articol are ca punct de plecare unele momente din activitatea noastră de ,,problem posing" sau de ,,problem solving" sau chiar de propunerea spre publicare în reviste de matematică din diverse ţări a unor articole care utilizează inegalitatea (B). Astfel, am propus probleme care se rezolvau cu inegalitatea lui Bergström, dar, considerând-o necunoscută în acele ţări, am procedat ca în Gazeta Matematică, adică $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\beta} + \dfrac{z^2}{\gamma} \overset{(CBS)}{\geq} \dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. Referentul (secret) ne-a comunicat în referat ,,Please explain the step CBS". Pentru ca problema să nu fie respinsă a trebuit să facem acest lucru, explicând implicaţia: (B)$\Rightarrow$(CBS).

S-a mai întâmplat ca la aceeaşi publicaţie, sau la altele, să trimitem alte inegalităţi în care foloseam $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\beta} + \dfrac{z^2}{\gamma} \overset{(B)}{\geq} \dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. În aceste cazuri, materialele au fost ori aprobate fără obiecţie (inegalitatea fiind cunoscută sub numele Bergström), ori ni s-au cerut detalii despre istoricul relaţiei lui *H. Bergström* (inegalitatea nefiind cunoscută).

De fapt este foarte simplu, dacă inegalităţile sunt de tip (B), rezolvaţi-le cu *inegalitatea lui Bergström* şi nu cu inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz.*