Un procedeu de abordare a unor probleme de extrem geometric

Daniel VĂCARU[1]

Abstract. In this methodical Note, a procedure for solving geometrical problems of various types is presented and applied.

Keywords: right-angled triangle, decreasing function, extreme value.

MSC 2010: 97D40.

În această Notă, indicăm un procedeu de rezolvare a unor probleme de geometrie în care se cere determinarea unei valori de extrem sau unei condiţii de realizare a unui extrem.

Esenţa procedeului este cuprinsă în următoarele leme:

Lema 1. *Dacă funcţia* $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ *satisface condiţia* $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=f(t)$, $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *şi este strict descrescătoare pe* $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, *atunci* $f(t)\geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $t=\frac{\pi}{4}$.

Demonstraţie. În condiţiile din enunţ, dreapta $x=\frac{\pi}{4}$ este axă de simetrie a graficului funcţiei f şi afirmaţiile dorite rezultă imediat.

Lema 2. *Dacă funcţia* $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ *satisface condiţia* $f(t)+f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=0$, $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *şi este strict crescătoare pe* $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, *atunci ecuaţia* $f(x)+f(y)=0$, $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *are ca soluţii perechile* $\left(t,\frac{\pi}{2}-t\right)$, $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din faptul că punctul $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ este centru de simetrie al graficului funcţiei f.

Problema 1 [**5**]. *În orice triunghi dreptunghic are loc inegalitatea*

$$\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\geq 2\sqrt{2},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiul dreptunghic este isocel.

Soluţie. Deoarece în cazul triunghiurilor dreptunghice $R=\frac{a}{2}$ şi $r=\frac{b+c-a}{2}$, avem

$$\frac{R}{r}+\frac{r}{R}=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b+c-a}{a}=\frac{1}{\sin B+\sin C-1}+\sin B+\sin C-1=$$
$$=\frac{1}{\sin B+\cos B-1}+\sin B+\cos B-1.$$

[1] Profesor, Colegiul Economic ,,Maria Teiuleanu", Piteşti; e-mail: *danvaccag@gmail.com*

Considerăm funcţia f dată de

$$f(t)=\frac{1}{\sin t+\cos t-1}+\sin t+\cos t-1,\ \ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Evident, $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=f(t)$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Putem scrie f în forma $f=h\circ g$, unde

$$g(t)=\sin t+\cos t-1,\ \ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

şi

$$h(x)=\frac{1}{x}+x,\ \ x\in(0,1).$$

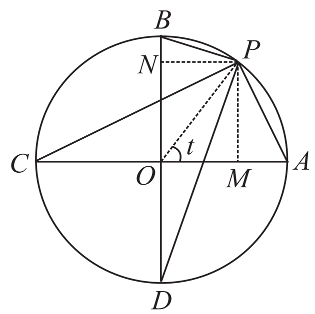
Cum $g(t)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-1$, deducem că g este strict crescătoare pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$. Tot pe cale elementară (de exemplu, apelând la definiţie), se stabileşte că h este strict descrescătoare pe $(0,1)$. Ca urmare, $f=h\circ g$ este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Conform Lemei 1, obţinem că $f(t)\geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, adică $\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\geq\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $B=\frac{\pi}{4}$.

Observaţie. Într-un triunghi oarecare are loc $\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\geq\frac{5}{2}$, iar semnul de egalitate apare numai pentru triunghiuri echilaterale [**1**].

Problema 2 [**4**]. *Fie $ABCD$ un pătrat înscris într-un cerc şi P un punct pe arcul (mic) $\widehat{AB}$. Determinaţi minimul expresiei* $\frac{PC\cdot PD}{PA\cdot PB}$.

Soluţie. Notăm cu O centrul cercului şi considerăm raza lui egală cu 1. Fie $t=m(\widehat{AOP})\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $M=pr_{AC}P$, $N=pr_{BD}P$. Evident, $OM=NP=\cos t$ şi $ON=MP=\sin t$. Cu teorema lui Pitagora, obţinem:



$PC^2=(1+\cos t)^2+\sin^2 t$, deci $PC=2\cos\frac{t}{2}$;

$PD^2=(1+\sin t)^2+\cos^2 t$, deci $PD=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$;

$PA^2=(1-\cos t)^2+\sin^2 t$, deci $PA=2\sin\frac{t}{2}$;

$PB^2=(1-\sin t)^2+\cos^2 t$, deci $PB=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$.

Pentru raportul din enunţul problemei obţinem:

$$f(t)=\frac{\cos\frac{t}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{t}{2}},\ \ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Punând f în forma $f(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}$, deducem uşor că $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = f(t)$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pentru a arăta că f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, punem f în forma $f = h \circ g$, unde

$$g(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2},\ \ t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right],$$
$$h(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+x}{1-x},\ \ x \in (0, \sqrt{2}-1];$$

într-adevăr, g este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ şi ia valori în $\left(0, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) \equiv (0, \sqrt{2}-1]$, pe când h este strict descrescătoare pe $(0, \sqrt{2}-1]$ (fapt ce se stabileşte cu sau fără utilizarea derivatei).

Conform Lemei 1, avem $f(t) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, cu semnul egal numai pentru $t = \frac{\pi}{4}$. Deci,

$$\frac{PC\cdot PD}{PA\cdot PB} \geq \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} = 3+2\sqrt{2},$$

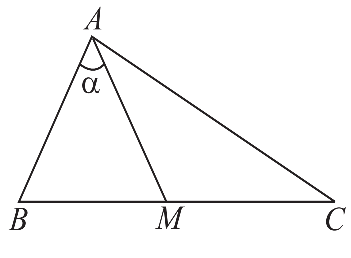
iar valoarea $3+2\sqrt{2}$ este luată de raport dacă şi numai dacă punctul P este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Problema 3. *Fie ABC un triunghi oarecare şi punctul $M \in (BC)$. Determinaţi poziţia lui M pentru care funcţia*

$$F(M) = \frac{AB^2\cdot MC^2 + AC^2\cdot MB^2}{BC^2\cdot MA^2}$$

are valoare extremă.

Soluţie. Punctul M are poziţia precizată de $\alpha = m(\widehat{MAB})$. Cu teorema sinusurilor, avem: $MA = \dfrac{c\sin B}{\sin M}$, $MB = \dfrac{c\sin\alpha}{\sin M}$ şi $MC = \dfrac{b\sin(A-\alpha)}{\sin M}$. Ca urmare, obţinem:



$$F(\alpha) = \frac{b^2c^2\sin^2(A-\alpha) + b^2c^2\sin^2\alpha}{a^2c^2\sin^2 B} = $$
$$= \frac{1}{\sin^2 A}[\sin^2\alpha + \sin^2(A-\alpha)]$$

şi apoi, utilizând formula $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, vom avea:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 A}[1 - \cos A\cdot\cos(A-2\alpha)],\ \ \alpha \in (0, A).$$

Se arată uşor că $F(A-\alpha) = F(\alpha)$, $\alpha \in (0, A)$. În privinţa monotoniei funcţiei F pe intervalul $\left(0, \frac{A}{2}\right]$ distingem cazurile:

Dacă $A < \frac{\pi}{2}$, atunci $\cos A > 0$ şi deducem că F este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{A}{2}\right]$. Aplicând Lema 1 adaptată la intervalul $\left(0, \frac{A}{2}\right]$, rezultă că $F(\alpha) \geq F\left(\frac{A}{2}\right)$, $\alpha \in (0, A)$. Prin urmare, dacă unghiul A este ascuţit, atunci funcţia F are un minim când M este piciorul bisectoarei unghiului A şi valoarea acestuia este $\frac{1}{1+\cos A}$.

Dacă $A > \frac{\pi}{2}$, funcţia F este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{A}{2}\right]$ şi vom avea $F(\alpha) \leq F\left(\frac{A}{2}\right)$, $\alpha \in (0, A)$. Deci, dacă triunghiul este obtuzunghic în A, funcţia F are un maxim egal cu $\frac{1}{1+\cos A}$ în piciorul bisectoarei din A şi numai în acest punct.

Dacă $A = \frac{\pi}{2}$, se constată direct că $F(\alpha) = 1$, $\alpha \in (0, A)$, adică F este o funcţie constantă. Aşadar, dacă un triunghi ABC este dreptunghic în A, atunci pentru orice $M \in (BC)$ are loc relaţia $AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot MA^2$ (teorema lui Van Aubel) ([**2**], p. 51).

Problema 4 ([**3**], p.30). *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi D piciorul înălţimii din vârful A. Notăm cu I_1 şi I_2 incentrele triugnhiurilor ADB, respectiv ADC şi cu M, N proiecţiile lor pe AB, respectiv AC. Dacă I_1M şi I_2N se intersectează pe BC, atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.*

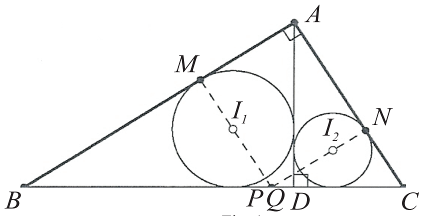


Fig. 1

Soluţie. Notăm cu P, Q intersecţiile dreptelor I_1M, respectiv I_2N cu BC. Din $I_1M \perp AB$ şi $I_2N \perp AC$ rezultă că

$$\begin{aligned} BP &= \frac{BM}{\cos B} = \frac{AB + BD - AD}{2\cos B} = \frac{c(1+\cos B - \sin B)}{2\cos B}, \\ CQ &= \frac{CN}{\cos C} = \frac{AC + CD - AD}{2\cos B} = \frac{b(1+\cos C - \sin C)}{2\cos C}. \end{aligned}$$

Condiţia din enunţul problemei revine la $BP + CQ = a$ şi se scrie

$$\frac{\sin C(1+\cos B - \sin B)}{2\cos B} + \frac{\sin B(1+\cos C - \sin C)}{2\cos C} = \sin A$$

sau, ţinând seama de relaţia $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$,

$$\sin C\left(\frac{1+\cos B - \sin B}{2\cos B} - \cos B\right) + \sin B\left(\frac{1+\cos C - \sin C}{2\cos C} - \cos C\right) = 0.$$

sau, în final,

$$\frac{\cos B - \sin B - \cos 2B}{2\sin B\cos B} + \frac{\cos C - \sin C - \cos 2C}{2\sin C\cos C} = 0.$$

Această condiţie se scrie sub forma

$$(*) \qquad f(B) + f(C) = 0, \quad B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

unde $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$f(t) = \frac{\cos t - \sin t - \cos 2t}{2 \sin t \cos t}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ şi că $f\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = -f(t)$ sau $f(t) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = 0$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, adică punctul $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ este centru de simetrie pentru graficul funcţiei f. Dacă scriem f sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\cos t}\left(\frac{\sin \frac{3t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} - 1\right), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

şi observăm că ambii factori sunt funcţii strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, deducem că f este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Conform Lemei 2, ecuaţia $(*)$ admite numai soluţiile $B = t$, $C = \dfrac{\pi}{2} - t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, adică B şi C sunt complementare şi, deci, triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Observaţie. Soluţiile date pe baza procedeului propus diferă de cele aflate în sursele indicate în bibliografie.

Sugerăm cititorilor să rezolve cu acest procedeu problemele următoare:

1. Arătaţi că într-un triunghi dreptunghic, cu $A = \dfrac{\pi}{2}$, au loc inegalităţile:

(i) $\dfrac{R}{p} + \dfrac{p}{R} \leq 2\sqrt{2}$;

(ii) $\dfrac{r_a}{r} + \dfrac{r}{r_a} \geq 6$.

În ce condiţii aceste relaţii devin egalităţi?

2. Fie ABC un triunghi oarecare şi M un punct pe latura BC. Să se determine valorile extreme ale funcţiei

$$F(M) = \frac{AB \cdot MC + AC \cdot MB}{BC \cdot MA}, \quad M \in (BC).$$

Bibliografie

1. **L. Bankoff** – *Problema Q417*, Math. Mag., 40 (1967), 289; **D.S. Mitrinović** et al – *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, 1988, 165.
2. **D. Brânzei** et al. – *Geometrie. Clasa a IX-a*, ed. a III-a, Paralela 45, Piteşti, 1998.
3. **A.G. Brojbeanu** – *Câteva proprietăţi remarcabile ale triunghiului dreptunghic*, Recreaţii Matematice, 1/2014, 30-34.
4. **P. Ligouras** – *Problem J286*, Mathematical Reflections, 6/2013.
5. **D. Milošević** – *Problem 3767*, Crux Mathematicorum, 7/2012.