De la o problemă de pe forum la conjectura funcţiilor continue care comută

Valeriu BRAŞOVEANU, Marian TETIVA [1]

Abstract. The article provides a mathematical story about how one can get from a simple problem to more and more complicated and deeper issues, concerning fixed points of continuous and monotonic functions. We lead the reader from well-known results as Knaster′s or Brouwer′s theorems to less known and more subtle results as the conjecture of commuting continuous functions.

Keywords: fixed point, continuous function, monotonic function, commuting functions, Knaster′s theorem.

MSC 2010: 47H10, 54H25.

1. Preliminarii. *Teorema de punct fix a lui Brouwer* ([**5**], dar se poate consulta cu succes şi Wikipedia) ne spune că *orice funcţie continuă definită pe o bilă închisă din spaţiul euclidian* $\mathbb{R}^n$ *cu valori în aceeaşi bilă are (măcar) un punct fix.* Cazul particular al acestei teoreme în dimensiunea 1 ne este tuturor bine cunoscut (aici şi mai departe a şi b sunt numere reale cu $a < b$; se poate şi $a = b$, dar nu e foarte interesant):

Propoziţia 1. *Dacă* $f : [a, b] \to [a, b]$ *este o funcţie continuă, atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$.

Demonstraţie. Aplicând proprietatea lui Darboux funcţiei continue h definită prin $h(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [a, b]$, pentru care avem $h(a) \geq 0$ şi $h(b) \leq 0$, rezultă existenţa unui $c \in [a, b]$ cu proprietatea $h(c) = 0$, adică rezultă existenţa unui punct fix pentru f.

Se mai poate uşor observa că, de fapt, nu e nevoie ca funcţia să ia valori în intervalul $[a, b]$: e suficient să avem $f(a) \geq a$ şi $f(b) \leq b$ - şi se poate şi invers -, astfel că e valabil următorul enunţ:

Propoziţia 1′. *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pentru care* $f(a) \geq a$ *şi* $f(b) \leq b$*, atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$*. De asemenea, dacă* $f(a) \leq a$ *şi* $f(b) \geq b$*, atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$.

O întrebare naturală se pune: există oare o teoremă de acest tip şi pentru alte clase de funcţii? Şi tot în mod natural ne îndreptăm gândul către funcţiile monotone. Exemplul funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} a + b - x, & a \leq x < \dfrac{a+b}{2} \\ a, & \dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

ne descurajează imediat în privinţa funcţiilor descrescătoare (f ia valori în $[a, b]$, este descrescătoare şi nu are nici un punct fix; o uşoară modificare a lui f poate furniza

[1] Profesori, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

şi un exemplu de asemenea funcţie *strict* descrescătoare). Totuşi, avem următorul rezultat (poate mai puţin cunoscut decât Propoziţia 1, dar suficient de cunoscut):

Propoziţia 2. *Dacă $f : [a, b] \to [a, b]$ este o funcţie monoton crescătoare, atunci f are (măcar) un punct fix.*

Demonstraţie. Fie M mulţimea acelor x din $[a, b]$ pentru care $x \leq f(x)$. Avem $a \in M$, deci M este nevidă şi, desigur, ea este şi mărginită, fiind inclusă în intervalul compact $[a, b]$. Dacă $s = \sup M$, rezultă în mod clar că $s \in [a, b]$. De asemenea, se vede uşor că $x \in M$ implică $f(x) \in M$ (datorită monotoniei funcţiei f, $x \leq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(f(x))$). Cum $x \leq s$ pentru orice $x \in M$, avem şi $x \leq f(x) \leq f(s)$, pentru orice $x \in M$, deci $s \leq f(s)$ ($f(s)$ fiind cel puţin egal cu orice element din M trebuie să fie cel puţin egal şi cu marginea superioară a acestei mulţimi). Asta ne arată că s este el însuşi un element al mulţimii M, deci $f(s) \in M$ şi atunci $f(s) \leq \sup M = s$. Dar $s \leq f(s)$ şi $f(s) \leq s$ înseamnă că $f(s) = s$, deci s este punct fix pentru f, încheind demonstraţia.

Exerciţiu. Demonstraţi în mod analog că infimumul mulţimii $N = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq x\}$ este punct fix pentru f. (Ceea ce - atenţie! - nu înseamnă că ar fi asigurată existenţa a două puncte fixe pentru f în condiţiile enunţului, ci doar că avem două variante de demonstraţie.)

Observaţie. Putem numi Propoziţia 2 teorema lui Knaster, deşi ea nu reprezintă decât un caz particular al acestei teoreme. De fapt, în cazul general, ea se numeşte *teorema Knaster-Tarski* şi se enunţă în termeni de teoria laticelor: *dacă L este o latice completă şi $f : L \to L$ este o funcţie care păstrează ordinea (putem să o numim tot funcţie crescătoare), atunci mulţimea punctelor fixe ale lui f formează, de asemenea, o latice completă.* În particular, rezultă că această mulţime este nevidă, deci că f admite puncte fixe. Nu intrăm în aceste amănunte (pentru cei interesaţi articolul de pe Wikipedia e destul de riguros şi detaliat), dar vă propunem următorul

Exerciţiu. Fie E o mulţime nevidă, $P(E)$ mulţimea părţilor lui E şi $f : E \to E$ o funcţie crescătoare, adică o funcţie cu proprietatea că $f(X) \subseteq f(Y)$, pentru orice $X, Y \in P(E)$ cu $X \subseteq Y$. Există atunci $C \in P(E)$ astfel încât $f(C) = C$.

Se pare că aceasta a fost forma în care Knaster a demonstrat iniţial teorema în 1928 (forma generală fiind publicată abia în 1955). În zilele noastre ea a apărut (şi probabil va mai apărea o vreme) pe la diverse concursuri de matematică pentru elevi.

O frumoasă legătură între propoziţiile enunţate anterior a făcut **Sebastian Aniţa** [**2**] , anume:

Propoziţia 3. *Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $g(a) \leq g(b)$ şi $f : [a, b] \to [g(a), g(b)]$ o funcţie crescătoare. Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = g(c)$.*

Demonstraţie. În spiritul demonstraţiei Propoziţiei 2 (care se obţine din Propoziţia 3 pentru $g(x) = x$; iar pentru $f(x) = x$ obţinem partea a doua a Propoziţiei $1'$), să considerăm mulţimea

$$M = \{x \in [a, b] \mid g(x) \leq f(x)\}$$

şi $s = \sup M$. (Observaţi că, totuşi, demonstraţia de mai sus a Propoziţiei 2 nu funcţionează prin analogie şi pentru Propoziţia 3. Ipoteza continuităţii funcţiei g, coroborată cu - doar - monotonia lui f solicită utilizarea unui instrument care să funcţioneze pentru amândouă; e vorba despre trecerea la limită.) Mulţimea M este nevidă ($a \in M$) şi există un şir (s_n) de elemente din M care are limita s; pentru fiecare $s_n \in M$ avem, desigur, $g(s_n) \leq f(s_n)$, deci prin trecere la limită obţinem

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} g(s_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{x\to s,\ x<s} f(x) \leq f(s)$$

(funcţia f fiind crescătoare are limite laterale în s, limita la stânga fiind cel mult egală cu valoarea funcţiei acolo). Dacă $s = b$ demonstraţia este încheiată, căci am obţinut $g(b) \leq f(b)$, iar enunţul ne spune că $f(b) \leq g(b)$, aşadar se poate considera $c = b$. Altminteri avem $g(x) > f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, $x > s$ (un asemenea x nu aparţine mulţimii M), deci, iarăşi prin trecere la limită, avem

$$g(s) = \lim_{x\to s,\ x>s} g(x) \geq \lim_{x\to s,\ x>s} f(x) \geq f(s).$$

Se obţine deci şi în acest caz că $g(s) \leq f(s)$ şi $f(s) \leq g(s)$, adică $f(s) = g(s)$ şi putem lua $c = s$.

O demonstraţie elegantă, care utilizează lema intervalelor închise incluse, poate fi găsită în [**8**], la paginile 228-230.

Exerciţiu. Arătaţi că există $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *crescătoare, cu* $f(a) < g(a)$ *şi* $f(b) > g(b)$*, astfel încât* $f(x) \neq g(x)$ *pentru orice* $x \in [a, b]$. Dacă dorim, putem impune şi condiţii asupra codomeniului lui g, şi tot vom putea găsi destul de uşor asemenea exemple. În schimb nu mai e necesară condiţia în privinţa ordinii între $g(a)$ şi $g(b)$.

2. Care este, de fapt, problema? Problema ni s-a arătat pe un forum de discuţii matematice (TheMathForum@Drexel, 12 august 2008), iar în această notă intenţionăm să explicăm cam cum am gândit pornind de la ea, în speranţa că le va fi de folos şi altora. Ea suna cam aşa:

Exerciţiu. Fie f *şi* g *două funcţii continue pe* $[0, 1]$ *astfel încât* $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$*,* f *şi* g *comută (adică* $f(g(x)) = g(f(x))$, $\forall x \in [0, 1]$*), iar* f *este strict crescătoare. Să se arate că există un* $x_0 \in [0, 1]$ *astfel încât* $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

De la bun început se pare că sunt prea multe condiţii. Având în minte toate rezultatele din preliminarii, ne dăm repede seama că se poate renunţa la unele dintre ele. De exemplu, ştim că f are un punct fix, să-l numim c. Condiţia de comutativitate ne spune că $f(g(c)) = g(f(c))$, adică $f(g(c)) = g(c)$ (pentru că $f(c) = c$), cu alte cuvinte ne spune că şi $g(c)$ este punct fix pentru f. Astfel am obţinut fără mare efort următorul rezultat a cărui demonstraţie cititorul o va completa cu uşurinţă:

Propoziţia 4. *Fie* $f : [a, b] \to [a, b]$ *o funcţie continuă care are un singur punct fix în intervalul* $[a, b]$ *şi* $g : [a, b] \to [a, b]$ *o funcţie care comută cu* f*. Atunci* f *şi* g *au un punct fix comun.*

Se prea poate ca propunătorul problemei de pe forum să fi avut în vedere şi un asemenea enunţ. Se vede că am renunţat la multe dintre condiţiile date iniţial, dar cu preţul adăugării unei alte condiţii suficient de restrictive pentru f. Chiar şi aşa, bănuiala că în problema originală ipoteza este supraaglomerată rămâne. Rafinând puţin raţionamentul de mai sus, vedem că putem arăta (ceva mai elaborat) şi

Propoziţia 5. *Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ funcţii continue care comută şi astfel încât una dintre ele este crescătoare. Atunci f şi g au un punct fix comun.*

Demonstraţie. Să presupunem că g este funcţia despre care ştim că e crescătoare. Există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$ (conform Propoziţiei 1), iar folosind condiţia $g \circ f = f \circ g$ obţinem (ca mai sus) că $g(c)$ este de asemenea punct fix pentru f. Analog obţinem că $g^{[n]}(c)$ este punct fix pentru f oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, unde $g^{[n]} = g \circ \cdots \circ g$ este a n-a iterată a lui g.

Să presupunem, de exemplu, că avem $c \leq g(c)$. Folosind monotonia funcţiei g, rezultă $c \leq g(c) \leq g^{[2]}(c) \leq \cdots$, adică rezultă că şirul $(g^{[n]}(c))_{n \geq 1}$ este crescător. De asemenea, acest şir este şi mărginit (toţi termenii săi sunt în intervalul $[a, b]$), deci el are o limită $l \in [a, b]$. Prin trecere la limită în relaţia $g(g^{[n]}(c)) = g^{[n+1]}(c)$ rezultă că $g(l) = l$, iar prin trecere la limită în $f(g^{[n]}(c)) = g^{[n]}(c)$ rezultă $f(l) = l$ (desigur, continuitatea funcţiilor f şi g este esenţială în aceste treceri la limită). Prin urmare limita l a şirului $(g^{[n]}(c))_{n \geq 1}$ este un punct fix comun pentru f şi g. Demonstraţia se încheie dacă mai observăm că în cazul $g(c) \leq c$ se poate proceda absolut analog.

Dacă aţi încercat să rezolvaţi problema originală se poate să fi fost conduşi pe o pistă falsă de condiţiile (vedem acum că inutile) $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$. (Noi bănuim că autorul a vrut să spună doar că f şi g au valori în $[0, 1]$.) De asemenea, faptul că monotonia unei funcţii este strictă nu pare a fi important. Astfel că, ajunşi aici, simţind cumva că am repurtat o mică victorie, am trăit o vreme cu impresia că vom putea modifica (nu prea mult, credeam noi) raţionamentul astfel încât să putem obţine concluzia şi fără ipoteza monotoniei uneia dintre funcţii. Totuşi, asta s-a dovedit o fundătură; deşi avem în continuare şirul $(g^{[n]}(c))_{n \geq 1}$ de puncte fixe ale funcţiei f, şi putem deduce că el are un subşir convergent (fiind mărginit), asupra acestui subşir nu mai avem nici un control. Putem arăta şi acum că limita acestui subşir este punct fix pentru f, dar nu avem nici o şansă să obţinem rezultatul similar pentru g. Nu putem nici măcar să arătăm că această limită este ceea ce se numeşte un *punct periodic* pentru g, adică un punct fix al unei anumite funcţii $g^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}^*$. E drept că repetând cumva raţionamentul din Propoziţia 2, putem demonstra

Propoziţia 5′. *Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii care comută astfel încât g este crescătoare şi mulţimea F a punctelor fixe ale lui f are proprietatea că supremumul oricărei submulţimi a lui F aparţine, de asemenea, lui F. Atunci f şi g au un punct fix comun.*

În esenţă este vorba de argumentul din demonstraţia Propoziţiei 2 (cazul particular al teoremei Knaster-Tarski), aplicat funcţiei g definită pe mulţimea punctelor fixe ale lui f. Pare să fie un enunţ foarte general (şi este) dar e greu să obţii de aici prea multe cazuri particulare interesante.

Ne aflam într-un impas: părea că ne scapă nouă ceva, şi chiar aşa era - dar nu în sensul în care credeam noi.

A fost momentul în care am descoperit câteva articole [**1**,**3**,**4**,**6**,**7**] (toate se găsesc pe Internet la îndemâna oricui) în care era vorba despre *conjectura funcţiilor continue care comută*, formulată de către **Eldon Dyer** în 1954, **A. J. Shields** în 1955 şi **Lester Dubins** în 1956. Aceasta postula că *două funcţii* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *continue şi care comută au un punct fix comun.* Se ştia încă de pe la 1920 că rezultatul este adevărat pentru funcţii polinomiale (**J. F. Ritt**), iar **A. J. Schwartz** reuşise să demonstreze [**6**] că două asemenea funcţii dintre care una este derivabilă cu derivata continuă au cu siguranţă un punct periodic comun (mai precis, dacă f este derivabilă cu derivata continuă, există un $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $x_0 = f(x_0) = g^{[m]}(x_0)$ pentru un anumit număr natural $m \geq 1$). Totuşi, în 1969, **William M. Boyce** [**3**] şi **John Hunecke** [**4**] au reuşit să construiască exemple de funcţii continue care comută şi nu au puncte fixe comune, infirmând definitiv conjectura. De asemenea, în cel mai recent articol [**7**] (din 1999) pe care l-am găsit pe această temă se spune că e mai degrabă plauzibil să *nu* fie asigurată (în general, pentru funcţii doar continue) nici măcar existenţa punctelor periodice comune, dar un contraexemplu nu era cunoscut atunci.

Toate demonstraţiile (şi exemplele ce contrazic conjectura) sunt cu mult peste nivelul acestei expuneri, iată deci că nu aveam nici o şansă de a rezolva problema fără a citi despre ea. Aşa că ne-am gândit la alte sensuri în care problema ar mai putea fi studiată, de exemplu pentru alte clase de funcţii. Cel mai natural este să ne întrebăm ce se întâmplă pentru funcţiile monotone.

Exerciţiu. Arătaţi că există funcţii $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *care sunt monotone şi care comută, dar nu au puncte fixe comune.*

Gândiţi-vă să alegeţi cel puţin una dintre funcţii descrescătoare, pentru că altminteri avem

Propoziţia 6. *Dacă* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *sunt funcţii crescătoare care comută, atunci ele au cel puţin un punct fix comun.*

Demonstraţie. Revenim la ideea din demonstraţia Propoziţiei 2 (sau din demonstraţia teoremei generale Knaster-Tarski). Anume, să considerăm mulţimea

$$M = \{x \in [a, b] \ | \ x \leq f(x) \ \text{şi} \ x \leq g(x)\},$$

care este nevidă ($a \in M$) şi mărginită. Fie $s = \sup M$; desigur, $s \in [a, b]$.

Observăm că, dacă $x \in M$, avem $f(x) \in M$ şi $g(x) \in M$. De exemplu, $x \leq f(x) \Rightarrow g(x) \leq g(f(x)) = f(g(x))$ şi $x \leq g(x) \Rightarrow g(x) \leq g(g(x))$, astfel că $g(x) \in M$.

Apoi avem $x \leq f(x) \leq f(s)$ pentru orice $x \in M$ şi, analog, $x \leq g(x) \leq g(s)$ pentru orice $x \in M$, ceea ce implică $s \leq f(s)$ şi $s \leq g(s)$. Cu alte cuvinte, $s \in M$ şi atunci, pe baza primei observaţii, $f(s) \in M$ şi $g(s) \in M$. Dar asta înseamnă că $f(s) \leq s$ şi $g(s) \leq s$, adică, finalmente, $f(s) = g(s) = s$ - punctul s este un punct fix comun pentru f şi g - şi demonstraţia este încheiată.

3. Concluzii şi teme. Nu ne-am propus în această notă să demonstrăm ceva nou, sau să găsim o demonstraţie neaşteptată pentru vreun rezultat mai vechi. Ne-am propus, în schimb, să trecem în revistă câteva teoreme (zicem noi) elegante de punct fix, aşa cum ne-au venit în minte pe parcursul încercărilor de a rezolva o problemă - de fapt, nu numai de a o rezolva, dar şi de a gândi pe marginea ei, de a o generaliza, extinde, sau măcar de a vedea la ce rezultate asemănătoare ar mai putea ea să conducă. Cititorul poate observa că, lucrând la această problemă - în sensul menţionat -, ne-am amintit lucruri pe care le ştiam şi, de asemenea, am aflat lucruri despre care nu auziserăm mai înainte. Aşa se întâmplă de fiecare dată când ascultăm cu atenţie întrebările altora - acestea vor conduce la propriile noastre întrebări, iar unele dintre aceste întrebări vor primi răspunsuri, altele vor rămâne misterioase - cel puţin deocamdată şi, negreşit, altele nu vor fi prea interesante şi nu vor duce nicăieri (totuşi e nevoie şi de acestea).

Încheiem cu încă vreo câteva întrebări pentru cititorii interesaţi.

Exerciţiu. Unde se foloseşte, în Propoziţia 2, sau în Propoziţia 6, faptul că funcţiile au valori tot în intervalul $[a, b]$? (Nu e greu să ne dăm seama că lipsa acestei condiţii din ipoteză afectează validitatea concluziei.)

Exerciţiu. Demonstraţi Propoziţia $5'$ şi formulaţi cazuri particulare interesante.

Exerciţiu. Puteţi extinde Propoziţia 6 la un număr oarecare de funcţii? Cum? Dar pentru o infinitate de funcţii?

Exerciţiu. Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii continue cu proprietatea că $(f(x) - x)(g(x) - x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Să se arate că f şi g au un punct fix comun. Mai rămâne valabilă concluzia dacă (păstrând ipoteza de continuitate) presupunem că $(f(x) - x)(g(x) - x) \leq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$?

Exerciţiu. Dacă $f, g : [a, b] \to [a, b]$ sunt două funcţii crescătoare care comută şi $f^{[n]} = g^{[n]}$ pentru un anume $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $f = g$.

Exerciţiu. Un foarte frumos rezultat despre punctele periodice ale unei funcţii continue (şi o splendidă realizare a analizei reale de la finele secolului al XX-lea) este teorema lui Şarkovski. Citiţi despre această teoremă!

Ultimele două exerciţii par să nu aibă legătură cu textul; dar, nu se poate spune la prima vedere dacă două rezultate au sau nu legătură. Surprize apar mereu.

Bibliografie

1. **A. Alikhani-Koopaei** – *On common fixed and periodic points of commuting functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 21(1998),2, 269-276.
2. **S. Aniţa** – *Problema C:286*, GM 2/1983, p. 95.
3. **W.M. Boyce** – *Commuting Functions with no Common Fixed Point*, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), 77-92.
4. **J.P. Huneke** – *On Common Fixed Points of Commuting Continuous Functions on an Interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 371-381.
5. **M. Rădulescu, S. Rădulescu** – *Teoreme şi probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
6. **A.J. Schwartz** – *Common periodic points of commuting functions*, Michigan Math. J., 12(1965), 353-355.
7. **T.H. Steele** – *A note on periodic points and commuting functions*, Real Analysis Exchange, vol. 24(2), 1998/9, pp 781-790.
8. **N. Teodorescu & al** – *Probleme din Gazeta Matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.