Merge şi aşa!

Marian TETIVA [1]

Abstract. In this note, a couple of remarks, comments and solving methods regarding equation $a\cos t + b\sin t = c$ are presented for both cases when $a, b, c \in \mathbb{R}$, respectively $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Keywords: equation, complex number, sinus, cosinus.

MSC 2010: 97D40.

Nu, nu mă refer cu acest titlu la binecunoscutul cuvânt de ordine, aplicabil ori de câte ori ceva funcţionează prost, dar totuşi funcţionează. Nu, aici vom vorbi chiar despre o altă metodă de a rezolva o problemă: e vorba de aflarea sinusului şi cosinusului unui număr real t ştiind că ele verifică o ecuaţie de forma $a\cos t + b\sin t = c$, unde a, b, c sunt numere reale cu $a^2 + b^2 \neq 0$ şi $a^2 + b^2 \geq c^2$ (condiţia cunoscută de existenţă a soluţiilor). Pentru diverse metode de a face acest lucru se poate consulta orice manual de trigonometrie pentru începători. Metoda despre care vorbim noi în continuare este la îndemâna oricărui absolvent de clasa a zecea, dar cred că nu prea aţi văzut-o folosită în şcoala elementară.

Vom utiliza numere complexe: considerăm pe $z = \cos t + i\sin t$ şi observăm că avem

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{şi} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$

unde $\overline{z}$ este conjugatul complex al lui z, prin urmare ecuaţia se scrie

$$a\frac{1}{2}(z + \overline{z}) + b\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = c.$$

Dar z este un număr complex de modul 1, deci $\overline{z} = 1/z$, ceea ce înseamnă că ecuaţia noastră devine una de gradul al doilea (cu coeficienţi complecşi), anume:

$$(a - bi)z^2 - 2cz + a + bi = 0.$$

Având în vedere că $a^2 + b^2 \geq c^2$ discriminantul ecuaţiei este $\Delta = 4(c^2 - a^2 - b^2) \leq 0$, deci ea are soluţiile

$$z_{1,2} = \frac{c \pm i\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a - bi},$$

adică

$$z_1 = \frac{ac - b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} + \frac{bc + a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}i$$

şi

$$z_2 = \frac{ac + b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} + \frac{bc - a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}i.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Amintindu-ne că $z = \cos t + i \sin t$ şi identificând părţile reale, respectiv imaginare, vedem că valorile posibile pentru $\cos t$ şi $\sin t$ sunt

$$\cos t = \frac{ac - b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \quad \text{şi} \quad \sin t = \frac{bc + a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$$

sau

$$\cos t = \frac{ac + b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \quad \text{şi} \quad \sin t = \frac{bc - a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

Desigur, în cazul $a^2 + b^2 = c^2$, obţinem, practic, o singură valoare pentru perechea $(\cos t, \sin t)$ (de fapt: două egale). Cititorul este invitat să se convingă singur că aceste valori verifică ecuaţia iniţială şi că ele reprezintă, într-adevăr, cosinusul, respectiv sinusul unui număr real - cu alte cuvinte să vadă că suma pătratelor lor este egală cu 1.

Probabil că nici de acum încolo profesorii nu vor folosi această metodă de rezolvare a ecuaţiei $a\cos t + b\sin t = c$ cu elevii lor. Totuşi, trebuie să-i recunoaştem cel puţin un prim merit: acela că ne permite să calculăm *efectiv* $\cos t$ şi $\sin t$ în funcţie de a, b, c, fără prea mare efort şi într-un fel destul de elegant. (Faceţi asta şi rezolvând sistemul format din ecuaţiile $a\cos t + b\sin t = c$ şi $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, cum se procedează de obicei: nu mai e la fel de atrăgător, nu?) Totuşi, e clar că atunci când rezolvi prima dată ecuaţii de acest tip nu poţi folosi numere complexe, în primul rând pentru că încă nu s-au studiat. Pe de altă parte, după ce s-a încheiat şi capitolul despre numere complexe (cu tot cu forma lor trigonometrică) poate că o asemenea privire peste umăr, retrospectivă, ar avea beneficiile ei - ca să nu mai vorbim de faptul că utilizarea numerelor complexe în probleme al căror enunţ pare să nu aibă de a face cu ele reprezintă o metodă puternică (şi omniprezentă în matematică) pentru a soluţiona probleme dificile.

Ştiu că v-aţi pus deja o întrebare (ştiu, pentru că este o întrebare naturală): putem oare stabili condiţia de existenţă a soluţiilor ecuaţiei prin această metodă? Răspunsul este: da, dar... Adică da, se poate, dar mai complicat decât se face clasic (de exemplu folosind, într-o formă sau alta, inegalitatea Cauchy-Schwarz). Pentru asta să admitem că am avea $0 \neq a^2 + b^2 < c^2$, deci ecuaţia cu necunoscuta z are discriminantul număr real şi pozitiv şi, prin urmare, soluţiile sale sunt

$$z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a-bi} = \frac{c \pm \sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a^2+b^2}(a+bi).$$

Acum ideea e că noi căutăm un asemenea z care, în plus, are şi modulul 1. Condiţia $|z_1| = 1$ sau $|z_2| = 1$ se scrie

$$|c \pm \sqrt{c^2-a^2-b^2}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

(pentru o alegere a semnului) şi e uşor de verificat că, după ridicarea la pătrat obţinem (indiferent cu care dintre semnele plus/minus am pornit) $a^2 + b^2 = 0$ - contradicţie care arată că ecuaţia nu poate avea soluţii dacă $a^2 + b^2 < c^2$ (şi cel puţin unul dintre a şi b este nenul). Deci se poate: merge şi aşa!

Mai departe mi-am pus următoarea întrebare (poate deja şi cititorul a făcut asta): ce se întâmplă dacă a, b, c nu mai sunt, neapărat, numere reale? Putem găsi numere t astfel încât $a\cos t + b\sin t = c$?

Să încercăm o altă abordare (întrucât, dacă am vrea să procedăm ca mai sus, ne-am împotmoli la rezolvarea ecuaţiei, neavând niciun control asupra discriminantului) şi anume utilizarea conjugatului - o tehnică obişnuită pentru numere complexe. Din $a\cos t + b\sin t = c$ rezultă (prin conjugare, şi ţinând seama de faptul că numerele $\cos t$ şi $\sin t$ sunt reale) $\overline{a}\cos t + \overline{b}\sin t = \overline{c}$. Acum să interpretăm aceste două ecuaţii ca pe un sistem liniar (cu necunoscutele $\cos t$ şi $\sin t$), pe care-l rezolvăm cu regula lui Cramer (admiţând că ea este aplicabilă). Găsim

$$\cos t = \frac{\overline{b}c - b\overline{c}}{a\overline{b} - \overline{a}b} \quad \text{şi} \quad \sin t = \frac{a\overline{c} - \overline{a}c}{a\overline{b} - \overline{a}b},$$

dacă presupunem că $a\overline{b} \neq \overline{a}b$ (în particular această metodă nu se poate aplica dacă a şi b sunt ambele numere reale, ca în cazul de manual studiat anterior). Desigur numărul t există dacă şi numai dacă valorile obţinute pentru $\cos t$ şi $\sin t$ sunt numere reale şi suma pătratelor lor este egală cu 1. Se poate uşor vedea că aceste numere sunt reale, deoarece fiecare este egal cu conjugatul său ($w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{w} = w$). Astfel am demonstrat valabilitatea următorului enunţ:

Problema 1. *Fie a, b, c numere complexe astfel încât $\overline{a}b \neq a\overline{b}$. Există un număr real t care verifică $a\cos t + b\sin t = c$ dacă şi numai dacă*

$$(\overline{b}c - b\overline{c})^2 + (a\overline{c} - \overline{a}c)^2 = (a\overline{b} - \overline{a}b)^2.$$

Lăsăm (iar!) în grija cititorului interesat detaliile acestei demonstraţii (e un enunţ cu "dacă şi numai dacă"!) precum şi să studieze ce se întâmplă dacă $a\overline{b} = \overline{a}b$; de exemplu, dacă a, b, c sunt toate reale, condiţia este îndeplinită, dar existenţa lui t nu este asigurată în toate cazurile, aşa cum am văzut în prima parte a acestei note.

La sfârşit vă propun (ca de obicei) încă un exerciţiu a cărui rezolvare seamănă mult cu cea de mai sus (dacă vă gândiţi puţin, vedeţi că şi enunţurile seamănă, nu?). Observaţi, de asemenea, de unde am plecat şi de unde am ajuns: întotdeauna se întâmplă aşa, dacă vrei mai mult decât, pur şi simplu, să rezolvi o problemă; adică dacă îţi pui întrebări şi cauţi mereu alte soluţii pentru probleme deja rezolvate (chiar aparent epuizate).

Problema 2. *Fie a, b, c trei numere complexe cu $a \neq 0$ şi $|a| \neq |c|$. Ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are o (singură) rădăcină de modul 1 dacă şi numai dacă are loc egalitatea*

$$|\overline{a}b - \overline{b}c| = ||a|^2 - |c|^2|.$$

Observaţi, de asemenea, că enunţul rămâne valabil şi pentru $a = 0$ (dar nu mai e vorba despre o ecuaţie de gradul al doilea). Ce se poate oare spune despre modulele rădăcinilor ecuaţiei dacă avem $|\overline{a}b - \overline{b}c| = ||a|^2 - |c|^2|$ şi $|a| = |c|$?