Rezolvarea unor ecuaţii şi inecuaţii integrale

Florin STĂNESCU[1]

Abstract. It is shown how the classical integral inequalities can be used, through the cases when they become equalities, for solving some types of integral equations or inequations. Chebyshev′s integral inequality and Jensen′s integral inequality are pre-eminently used.

Keywords: monotone function, convex function, Cebyshev′s integral inequality, Jensen′s integral inequality, integral equation.

MSC 2010: 97I70.

În această Notă prezentăm un procedeu de rezolvare aplicabil unui anumit tip de ecuaţii sau inecuaţii integrale sau unui tip de probleme ce apar adesea în concursurile şcolare şi reviste. Procedeul constă în următoarele: pentru rezolvarea unei ecuaţii/inecuaţii integrale se utilizează o inegalitate integrală clasică care se dovedeşte a fi egalitate în condiţiile problemei şi, în consecinţă, suntem conduşi la soluţia problemei.

Amintim inegalităţile integrale care vor fi utilizate cu precădere mai jos:

Inegalitatea lui Cebâşev: *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *două funcţii monotone. Atunci:*

a) $(b-a)\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$, *dacă* f *şi* g *au aceeaşi monotonie*;

b) $(b-a)\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$, *dacă* f *şi* g *sunt de monotonii diferite.*

În acestea, avem egalitate dacă şi numai dacă una dintre funcţiile f, g *este constantă* (*eventual cu excepţia unei mulţimi numărabile).*

Inegalitatea lui Jensen. *Fie* $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue. Atunci:*

a) $g\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right) \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(f(x))dx$, *dacă* g *este convexă*;

b) $g\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right) \geq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(f(x))dx$, *dacă* g *este concavă.*

Dacă funcţia g *este strict convexă* (*respectiv strict concavă*), *atunci la punctul a*) (*respectiv punctul b*)) *avem egalitate dacă şi numai dacă funcţia* f *este constantă.*

Problema 1. *Determinaţi funcţiile* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *derivabile de două ori, cu derivata* f'' *crescătoare pe* $[0, 2]$ *şi care verifică ecuaţia*

$$\int_1^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

[1]Profesor, Şcoala ,,Şerban Cioculescu", Găeşti

Soluţie. Ştim că o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ este convexă pe intervalul I dacă şi numai dacă $\forall x, y, z, t \in I$, $x < y < z < t$, avem:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(t) - f(y)}{t - y}.$$

Deoarece f'' este crescătoare, rezultă că f' este convexă pe $[0, 2]$; ca urmare, dacă $x, y \in [0, 1]$, $x < y$, ceea ce înseamnă că $x < y < x + 1 < y + 1$, avem: $f'(x + 1) - f'(x) \leq f'(y + 1) - f'(y)$, adică funcţia $x \to f'(x + 1) - f'(x)$ este crescătoare pe $[0, 1]$.

Conform inegalităţii lui Cebâşev, putem scrie:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x[f'(x+1) - f'(x)]dx &\geq \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 [f'(x+1) - f'(x)]dx \\ &= \frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pe de altă parte, cu ajutorul formulei de integrare prin părţi şi ţinând seama de ecuaţia din enunţ, avem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x[f'(x+1) - f'(x)]dx &= x[f(x+1) - f(x)]\Big|_0^1 - \int_0^1 [f(x+1) - f(x)]dx \\ &= f(2) - f(1) - \int_1^2 f(t)dt + \int_0^1 f(x)dx \\ &= f(2) - f(1) - \frac{f(2) - f(0)}{2} \\ &= \frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Aşadar, în (1) vom avea egalitate peste tot. Rezultă că una dintre funcţiile cărora le-am aplicat inegalitatea lui Cebâşev este constantă, ceea ce revine la $f'(x+1) - f'(x) = k$ (constantă reală), $\forall x \in [0, 1]$. Urmează că

$$f''(x + 1) = f''(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

şi deci $f''(0) = f''(1) = f''(2)$. De aici şi din faptul că f'' este crescătoare pe $[0, 2]$, deducem că f'' este constantă pe $[0, 2]$. În concluzie, funcţiile $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ care îndeplinesc cerinţele problemei au forma $f(x) = ax^2 + bc + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problema 2. *Determinaţi funcţiile* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *derivabile de două ori şi cu derivata* f'' *continuă pe* $[-1, 1]$*, crescătoare pe* $[-1, 0]$ *şi descrescătoare pe* $[0, 1]$ *şi care îndeplinesc condiţia* $f'(1) - f'(-1) = 2[f(1) - 2f(0) + f(-1)]$.

Soluţie. Considerăm funcţia $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0] \\ -x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

şi observăm că ea este continuă pe intervalul $[-1,1]$, crescătoare pe $[-1,0]$ şi descrescătoare pe $[0,1]$.

În condiţiile problemei, putem aplica inegalitatea lui Cebâşev pe intervalele $[-1,0]$ şi $[0,1]$ funcţiilor g şi f'':

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)f''(x)dx &= \int_{-1}^{0} g(x)f''(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)f''(x)dx \\ &\geq \int_{-1}^{0} g(x)dx \cdot \int_{-1}^{0} f''(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)dx \cdot \int_{0}^{1} f''(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)dx \cdot [f'(0)-f'(-1)] + \int_{0}^{1} (-x+1)dx \cdot [f'(1)-f'(0)] \\ &= \frac{f'(1)-f'(-1)}{2}.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, integrând prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)f''(x)dx &= \int_{-1}^{0} g(x)f''(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)f''(x)dx \\ &= (x+1)f'(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} f'(x)dx + (-x+1)f'(x)\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} f'(x)dx \\ &= f'(0) - [f(0)-f(-1)] - f'(0) + [f(1)-f(0)] = \\ &= f(1) - 2f(0) + f(-1).\end{aligned}$$

Combinând rezultatele obţinute şi având în vedere relaţia din problemă, avem:

$$f(1)-2f(0)+f(-1) = \int_{-1}^{1} g(x)f''(x)dx \geq \frac{f'(1)-f'(-1)}{2} = f(1)-2f(0)+f(-1),$$

deci inegalitatea lui Cebâşev devine egalitate pe fiecare din cele două intervale şi, ca urmare, funcţia continuă f este constantă pe $[-1,1]$. În consecinţă, pentru funcţia f găsim forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in [-1,1]$ ($a,b,c \in \mathbb{R}$ arbitrare). Se verifică direct că aceste funcţii satisfac cerinţele problemei.

Problema 3. *Se consideră $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict convexă, iar $a,b \in [-1,1]$ astfel încât*

$$a\int_{0}^{b} f(x)dx - b\int_{0}^{-a} f(x)dx = 2ab \cdot f\left(\frac{b-a}{4}\right).$$

Arătaţi că $ab = 0$.

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că $ab < 0$ (analog se raţionează şi pentru $ab > 0$). Egalitatea din enunţ poate fi scrisă sub forma

$$f\left(\frac{b-a}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)dx + \frac{1}{b}\int_{0}^{b} f(x)dx\right).$$

Definim funcţia $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ prin

$$g(x) = \begin{cases} ax, & x \in [-1,0] \\ bx, & x \in [0,1] \end{cases}.$$

Ea este continuă şi nu este constantă. Conform inegalităţii lui Jensen, putem scrie:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx\right) &< \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(g(x))dx \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} ax\,dx + \int_{0}^{1} bx\,dx\right]\right) < \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(ax)dx + \int_{0}^{1} f(bx)dx\right) \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{b-a}{4}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)dx + \frac{1}{b}\int_{0}^{b} f(x)dx\right). \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este în contradicţie cu forma în care a fost scrisă condiţia din enunţ. În concluzie, avem $ab = 0$.

Problema 4. *Determinaţi funcţiile continue* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *pentru care există* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $f(x^3 + x) = \sin ax$, $\forall x \in [0,1]$ *şi* $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 2\sin\frac{5a}{8}$.

Soluţie. Funcţia $g : [0,1] \to [0,2]$ definită prin $g(x) = x^3 + x$ este bijectivă, continuă şi strict crescătoare. Prima condiţie se scrie $f(g(x)) = \sin ax$, $x \in [0,1]$, sau $f(x) = \sin(a\,g^{-1}(x))$, $x \in [0,2]$. A doua condiţie se va scrie $\displaystyle\int_0^2 \sin(a\,g^{-1}(x))dx = 2\sin\frac{5a}{8}$. Aplicând inegalitatea lui Jensen, funcţia sinus fiind concavă pe $[0,2]$, obţinem:

$$\sin\frac{5a}{8} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin(a\,g^{-1}(x))dx \le \sin\left(\frac{a}{2}\int_0^2 g^{-1}(x)dx\right).$$

Putem calcula $\displaystyle\int_0^2 g^{-1}(x)dx$ cu inegalitatea lui Young (cazul de egalitate):

$$\int_0^1 g(x)dx + \int_0^2 g^{-1}(x)dx = 2\cdot 1 - 0\cdot 0 \Leftrightarrow \int_0^2 g^{-1}(x)dx = 2 - \int_0^1 (x^3 + x)dx = \frac{5}{4}.$$

Introducând acest rezultat mai sus, constatăm că în urma aplicării inegalităţii lui Jensen obţinem o egalitate. În consecinţă, funcţia ag^{-1} este constantă pe $[0,2]$ deci $a = 0$. Prima condiţie din enunţ devine $f(x^3 + x) = 0$, $x \in [0,1]$, adică $f(x) = 0$, $x \in [0,2]$.

Bibliografie

1. **N. Boboc** – *Analiză matematică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999.
2. **M. Ganga** – *Teme şi probleme de matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1991.
3. **C. Mortici** – *600 de probleme de matematică pentru concursuri*, Editura Gil, Zalău, 2001.