Asupra unei clase de ecuaţii/inecuaţii

Dan POPESCU[1]

Abstract. The interested reader finds some methodic aspects and comment concerning some selected problems given at mathematical contests.

Keywords: real number, complex number, exponential equation.

MSC 2010: 97D40.

În această Notă sunt strânse într-o clasă un număr de probleme propuse elevilor la ediţiile din ultimii ani ale olimpiadelor de matematică, începând cu etapa locală. În mare spus, este vorba de rezolvarea unor ecuaţii/inecuaţii exponenţiale care, spre deosebire de cele studiate la orele de matematică, au ca necunoscută şi date numere reale şi/sau numere complexe. În abordarea acestor ecuaţii se trece frecvent din domeniul real în cel complex, se apelează la interpretări geometrice sau se utilizează ajutător funcţii reale monotone. Aşadar, rezolvarea problemelor de acest tip necesită îmbinarea cunoştinţelor din mai multe capitole. Considerăm că elevii care participă la diferite concursuri şcolare vor găsi în această Notă un material folositor pregătirii lor.

Problema 1. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$ *şi* $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$*, astfel încât* $|a-b| = |a+b-2z|$.

a) *Să se arate că ecuaţia* $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x = |a-b|^x$ *cu necunoscuta* $x \in \mathbb{R}$*, are soluţie unică.*

b) *Să se rezolve inecuaţia* $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x \leq |a-b|^x$*, cu necunoscuta* $x \in \mathbb{R}$.

(**Vasile Stănescu** – *Problema 26669*, GM-B-10/2012 şi ONM-2013, etapa judeţeană).

Soluţia I (barem olimpiadă)**.** a) Fie $z_1 = z-a$ şi $z_2 = z-b$. Rezultă că z_1, z_2, $z_1+z_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ şi, în condiţia problemei, $|z_1-z_2| = |z_1+z_2|$. Avem $|z_1-z_2|^2 = |z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2) = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0$, de unde $|z_1+z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2^2| + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$, adică $|z_1+z_2|^2 = |z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$, ceea ce permite scrierea ecuaţiei sub forma

$$\left(\frac{|z_1|}{|z_1-z_2|}\right)^x + \left(\frac{|z_2|}{|z_1-z_2|}\right)^x = 1$$

sau, echivalent,

$$\left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z_1|^2-|z_2|^2}}\right)^x + \left(\frac{|z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}}\right)^x = 1.$$

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}}\right)^x + \left(\frac{|z_2|}{\sqrt{|z_1|^2-|z_2|^2}}\right)^x$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Ştefan cel Mare”, Suceava

este strict descrescătoare şi ia valoarea 1 pentru $x = 2$. Ca urmare, ecuaţia dată are $x = 2$ ca unică soluţie.

b) Mulţimea soluţiilor inecuaţiei este intervalul $[2, \infty)$.

Soluţia II. De fapt, o variantă a primei soluţii. Se face apel la interpretarea geometrică a noţiunii de număr complex. Cu notaţiile de mai sus, avem că $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, precum şi faptul că $z_1 + z_2, z_1 - z_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Fie, în planul euclidian raportat la sistemul de coordonate carteziene $(O; \bar{i}, \bar{j})$, punctele M_1 şi M_2 cu afixele z_1 şi, respectiv, z_2. Dacă M este imaginea geometrică a sumei $z_1 + z_2$, relaţia $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ arată faptul că OM_1MM_2 este dreptunghi, deci vectorii de poziţie $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ sunt ortogonali. Aşadar, există $\lambda \in \mathbb{R}^*$, astfel ca $z_1 = \lambda i z_1$. Cum $|z_1 - z_2| = |z_1|\sqrt{1+\lambda^2}$, ecuaţia se scrie în forma

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^x + \left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^x = 1.$$

Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^x + \left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^x$ este strict descrescătoare şi $g(2) = 1$. Atunci ecuaţia are soluţia unică $x = 2$.

Problema 2 (enunţ modificat)**.** *Se consideră numerele complexe z_1 şi z_2, încât $z_2 \neq 0$. Să se rezolve ecuaţia $|z_1|^x + |z_2|^x = |z_1 - z_2|^x$, $x \in \mathbb{R}$, ştiind că $\Re e\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$.* (**Dan Popescu** - ONM-2013, etapa locală, Suceava)

Soluţie. Cazul $z_1 = 0$ fiind nesemnificativ, fie $z_1 \neq 0$. Avem:

$$\Re e\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0.$$

Ca urmare, obţinem $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2 + |\overline{z}_2|^2$. De aici şi din faptul că $z_1 \neq 0$ şi $z_2 \neq 0$, rezultă că $|z_1| < |z_1 - z_2|$, şi analog, $|z_2| < |z_1 - z_2|$. Astfel, ecuaţia se scrie echivalent

$$\left(\frac{|z_1|}{|z_1 - z_2|}\right)^x + \left(\frac{|z_2|}{|z_1 - z_2|}\right)^x = 1$$

sau

$$\left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}\right)^x + \left(\frac{|z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}\right)^x = 1$$

sau $f(x) = 1$, cu funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită ca în problema precedentă. Cum această funcţie este strict descrescătoare şi $f(2) = 1$, obţinem că 2 este singura soluţie a ecuaţiei în cazul $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

Problema 3. *Să se determine mulţimea M a punctelor din planul Euclidian de afix $z \in \mathbb{C}^*$, ştiind că $|\Re e|^{|z|} + |\Im m z|^{|z|} = |z|^{|z|}$.* (**Şerban Olteanu** - ONM-2009 etapa locală, Giurgiu)

Soluţie. În cazul $\Re\mathrm{e}\, z = 0$, adică $z = bi$, mulţimea este $M = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}^*\}$. Totodată, dacă $\Im\mathrm{m}\, z = 0$, mulţimea va fi $M = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}^*\}$.

Fie acum $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Ecuaţia se scrie echivalent:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\sqrt{a^2+b^2}} + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\sqrt{a^2+b^2}} = 1.$$

În cazul $\sqrt{a^2+b^2} < 2$, se deduce inegalitatea

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\sqrt{a^2+b^2}} + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\sqrt{a^2+b^2}} > \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

La fel, condiţia $\sqrt{a^2+b^2} < 2$ este inacceptabilă. Astfel, în acest caz, mulţimea M este cercul centrat în origine şi cu raza 2.

Problema 4. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ care îndeplinesc condiţiile $|z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Ştiind că $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, să se determine $x \in (0, \infty)$ din egalitatea*

$$x^{\log_a |z_1+z_2|} = x^{\log_a |z_1+z_3|} + x^{\log_a |z_2+z_2|}.$$

Soluţie. Ţinând cont de ipoteze, avem: $x^{\log_a |z_1+z_2|} = a^{\log_a |z_1+z_2| \cdot \log_a x} = |z_1 + z_2|^{\log_a x} = |z_3|^{\log_a x}$ etc. Ecuaţia dată se scrie, echivalent,

$$|z_3|^{\log_a x} = |z_2|^{\log_a x} + |z_1|^{\log_a x},$$

iar această ecuaţie are soluţia unică $\log_a x = 2$, adică $x = a^2$.

Problema 5. *Fie a, b, c, d numere complexe distincte două câte două încât $\Re\mathrm{e}\dfrac{b-a}{d-a} = \Re\mathrm{e}\dfrac{b-c}{d-c} = 0$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, dacă $|a-b|^x + |a-d|^x \le |b-d|^x \le |b-c|^x + |d-c|^x$.* (Enunţ propus în *Complex Numbers from A to...Z*, Birkhäuser Boston, 2006, autori **Titu Andreescu** şi **Dorin Andrica**).

Soluţie. Dacă A, B, C, D sunt punctele planului cu afixele a, b, c, d, condiţiile $\Re\mathrm{e}\dfrac{b-a}{d-a} = \Re\mathrm{e}\dfrac{b-c}{d-c} = 0$ exprimă faptul că $m(\measuredangle BAD) = m(\measuredangle BCD) = 90°$. Astfel, $|a-b| = AB$, $|a-d| = AD$ şi $|b-d| = BD$ şi prima inegalitate devine $AB^x + AD^x \le BD^x$, adică, echivalent, $x \ge 2$. Similar, a doua inegalitate conduce la $x \le 2$. În concluzie, $x = 2$ este soluţia problemei.

În final, propunem cititorului o problemă legată de conţinutul Notei:

Problema 6. *Să se determine $x \in \mathbb{R}$, dacă $|1 + a\bar{b}|^{2x} + |a-b|^{2x} = (1 + |a|^2 + |b|^2 + |ab|^2)^x$, unde a, b sunt numere complexe.* (**Dan Popescu**).

Indicaţie. Mai întâi se analizează cazurile $ab = 0$ şi $a = b$, iar apoi se apelează identitatea uşor de dovedit $|1 + a\bar{b}|^2 + |a-b|^2 = 1 + |a|^2 + |b|^2 + |ab|^2$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.