## CHESTIUNI METODICE

# Comentarii pe marginea unor probleme

***Mihai MONEA*** [1]***, Steluţa MONEA*** [2]

**Abstract.** We make some methodic remarks on solving geometry problems and we insist on the existence of the geometric objects before proving their properties.

**Keywords:** Erdös-Mordell inequality, Brocard angle.

**MSC 2010:** 97D50.

Punctul de plecare al acestei Note este *Problema 26624* din nr. 6-7-8/ 2012, Gazeta Matematică, seria B:

**Problema 26624** ([**2**])**.** *Fie $ABC$ un triunghi şi $M$ un punct în interiorul acestuia astfel încât $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle MCA) = 30^\circ$. Să se arate că*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{16S^2}{9R^2}. \tag{1}$$

Se pune în mod firesc întrebarea dacă construcţia din ipoteza problemei poate fi realizată, adică: există $M$ care să îndeplinească cerinţele problemei? În revistele destinate cu precădere elevilor apar frecvent probleme în care se trece uşor peste cerinţa existenţei obiectului geometric pus în discuţie. Consecinţele apar imediat. Chiar dacă nu suntem în cazul cel mai grav în care obictul nu există, apare totuşi riscul ca în rezolvarea problemei să pornim pe căi mai complicate şi nu pe cele fireşti şi simple.

În cazul problemei precedente, vom constata mai jos că existenţa unui punct $M$ ce verifică condiţiile cerute impune triunghiului $ABC$ să fie echilateral, iar însuşi punctului $M$ să fie centrul triunghiului. Odată stabilite acestea, se va constata imediat că relaţia (1) are loc cu semnul egal.

Să presupunem că problema are ca scop testarea ,,vigilenţei" rezolvitorilor. Atunci adevăratul rezolvitor va urma etapele:

1) (partea delicată) arată ca $\Delta ABC$ este echilateral şi $M \equiv O$ (centrul triunghiului),

2) (partea banală) verifică relaţia (1) în care se ia semnul de egalitate.

Pe când, rezolvitorul superficial va stabili într-un fel sau altul că are loc relaţia cerută, obţinând egalitate pentru cazul în care $\Delta ABC$ este echilateral. Excludem situaţia în care o problemă cu unele imperfecţiuni vede lumina tiparului. Fără alte comentarii...

Revenind la problema enunţată mai sus, vom stabili mai întâi că $\Delta ABC$ este echilateral pe două căi diferite. Instrumentele teoretice ce ne vor ajuta în acest scop sunt: inegalitatea Erdös-Mordell (de ex., [**1**], 12.13, p.105.) şi măsura unghiului

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Decebal", Deva

[2] Profesor, Colegiul Naţional ,,Decebal", Deva

Brocard $\omega$ trece în al unui triunghi (de ex., [**4**], 17.13, p. 155). Reamintim aceste rezultate în lemele următoare:

**Lema 1.** *Fie $P$ un punct interior triunghiului $ABC$. Dacă $x, y, z$ reprezintă distanţele de la $P$ la laturile triunghiului atunci este adevărată inegalitatea*

$$PA + PB + PC \geqslant 2\,(x + y + z)\,. \tag{2}$$

*Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral iar $P$ este centrul său.*

**Lema 2.** $\omega \leq 30°$ *şi $\omega$ este 30° dacă şi numai dacă $\Delta ABC$ este echilateral.*

**Demonstraţie.** Fie $\Omega$ punctul lui Brocard (direct) şi $D, E.F$ proiecţiile sale pe laturile $BC, CA$, şi respectiv $AB$. Avem: $m(\sphericalangle\Omega BC) = m(\sphericalangle\Omega CA) = m(\sphericalangle\Omega AB) = \omega$ şi deci au loc relaţiile: $\Omega D = \Omega B \cdot \sin\omega$, $\Omega E = \Omega C \cdot \sin\omega$, $\Omega F = \Omega A \cdot \sin\omega$. Aplicând inegalitatea Erdös-Mordell obţinem: $\Omega A + \Omega B + \Omega C = 2(\Omega B + \Omega C + \Omega A) \cdot \sin\omega$, de unde $2\sin\omega \leq 1$, adică $\omega \leq 30°$. Conform, lemei 1 are loc şi partea a doua a afirmaţiei.

Vom da acum două soluţii pentru Problema 26624.

*Soluţia I.* Evident, un triunghi echilateral cu punctul $M$ în centrul său îndeplineşte condiţiile problemei. Arătăm că acesta este singurul caz posibil. Într-adevăr, dacă există punctul $M$ cu proprietatea dată şi notăm cu $U, V, W$ picioarele perpendicularelor duse din $M$ pe laturile $AB, BC$ şi $CA$, atunci $MA = 2MU$ şi analoagele. Prin adunare obţinem $MA + MB + MC = 2MU + 2MV + 2PW$, adică egalitate în (2) şi, conform Lemei 1, $\Delta ABC$ este echilateral şi $M$ este centrul său. Ca urmare, avem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2 = 3 \cdot \frac{a^2}{3} = a^2;$$

dar

$$\frac{16S^2}{9R^2} = \frac{16}{9} \cdot \frac{3a^4}{16} \cdot \frac{3}{a^2} = a^2,$$

deci relaţia (1) are loc cu egalitate.

*Soluţia II.* Din condiţiile problemei şi Lema 2 rezultă nemijlocit că $\Delta ABC$ este echilateral şi $M$ coincide cu centrul său. Se continuă rezolvarea ca în soluţia precedentă.

Prezentăm încă o problemă care se încadrează în contextul în care ne aflăm.

**Problema 97** ([**3**]). *Într-un triunghi $ABC$, medianele $AA'$, $BB'$, $CC'$ fac cu laturile $AB$, $BC$ şi, respectiv $CA$ unghiuri de 30°. Demonstraţi că triunghiul este echilateral.*

*Soluţia autorului.* Dacă unul dintre unghiurile triunghiului are 60°, atunci mediana respectivă este bisectoare, iar triunghiul va fi isoscel cu un unghi de 60°, deci echilateral. Dacă toate unghiurile sunt diferite de 60°, construim $BA''\perp AA'$ , $CB''\perp BB'$ şi $AC''\perp CC'$, unde $A'' \in AA', B'' \in BB', C'' \in CC'$. Atunci, avem:

$$\frac{c}{2} = BA'' < BA' = \frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2} = CB'' < CB' = \frac{b}{2}, \quad \frac{b}{2} = AC'' < AC' = \frac{c}{2},$$

de unde obţinem
$$\frac{c}{2} < \frac{a}{2} < \frac{b}{2} < \frac{c}{2},$$
ceea ce nu este posibil.

*Soluţie alternativă.* Rezultatul este o consecinţă a Lemei 2. Mai mult, condiţia ca $AA'$, $BB', CC'$ să fie mediane nu este necesară. Este importantă doar concurenţa lor.

**Bibliografie**


1. **O. Bottema, R.Ž. Djordjević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić** – *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoe Publishing, Groningen, 1969.
2. *Problema 26624*, Gazeta Matematică, seria B, nr. 6-7-8/2012, p.364 (soluţie în nr. 1/2013, p.23).
3. *Problema 97*, Revista Minus, nr. 2/2008 (soluţie în nr. 1/2009, p.28).
4. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.


---

## Recreaţii ... matematice

*Răspuns la ,,recreaţia" de la pag. 102:*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | |
| 4 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 |
| 9 | 7 | |
| 63 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | |
| 15 | | |

Fiecare schemă se scrie după regula: pe rândul doi şi de la stânga la dreapta sunt scrise suma şi produsul numerelor aflate pe rândul întâi, iar pe rândul al treilea este scris cel mai mic multiplu comun al numerelor de pe al doilea rând.

Evident, numerele scrise pe primul rând se pot permuta (suma şi produsul lor fiind aceleaşi).

---

Vizitaţi pagina web a revistei **Recreaţii Matematice**:

# http://www.recreatiimatematice.ro