CHESTIUNI METODICE

Câteva soluţii la problema L222 din Recreaţii Matematice, nr. 1/2012

Titu ZVONARU [1]

Abstract. In this Note, the way to establish the inequality (1) is used as a pretext for pointing out several procedures and working tools that are useful in approaching inequalities.

Keywords: AM-GM inequality, Chebyshev′s inequality, Bergström′s inequality.

MSC 2010: 97H30, 52A40.

Vom prezenta opt soluţii (printre care şi soluţia autorului) pentru problema următoare:

L222. *Pentru a, b, c numere reale pozitive, demonstraţi inegalitatea*

$$a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq\frac{18}{a+b+c}. \tag{1}$$

Florin Stănescu, **Găeşti**

Cu acest prilej vor fi puse în evidenţă diverse procedee de lucru şi tehnici de calcul. Este util să scriem inegalitatea (1) în forma

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq\frac{18}{a+b+c},\quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*. \tag{2}$$

Soluţia 1. Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică, obţinem:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^2b^2c^2}}\geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{8abc}{a^2b^2c^2}}=\frac{6}{\sqrt[3]{abc}}\geq\frac{18}{a+b+c},$$

de unde rezultă (2). Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Soluţia 2. Putem să presupunem că $a\leq b\leq c$ fără a restrânge generalitatea. Ca urmare, $\frac{1}{a^2}\geq\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{c^2}$ şi $b+c\geq c+a\geq a+b$. Aplicând inegalitatea lui Cebîşev, obţinem

$$\frac{b+a}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq\frac{1}{3}(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

şi rămâne de arătat că

$$\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{18}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 27.$$

[1] Profesor, Comăneşti, *tzvonaru@yahoo.com*

Cu inegalitatea dintre mediile aritmetică şi geometrică, avem

$$(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq(3\sqrt[3]{abc})^2\frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}=27,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Soluţia 3 (a autorului)**.** Vom folosi inegalităţile $\dfrac{x_1^3}{y_1^2}+\dfrac{x_2^3}{y_2^2}+\dfrac{x_3^3}{y_3^2}\geq\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^3}{(y_1+y_2+y_3)^2}$, $\forall x_i,y_i\in\mathbb{R}_+^*$ (*Bergström*) şi $\dfrac{1}{ab+bc+ca}\geq\dfrac{3}{(a+b+c)^2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ (revine la $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$). Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\sum\frac{a+b}{c^2}=\sum\frac{(a+b)^3}{[c(a+b)]^2}\geq\frac{[\sum(a+b)]^3}{[\sum c(a+b)]^2}=$$
$$=\frac{8(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)^2}\geq\frac{2\cdot 9\cdot(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{18}{a+b+c}.$$

Soluţia 4 (**Daniel Văcaru**, *Piteşti*)**.** Punem (1) sub forma

$$\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2a^2}\geq\frac{18}{a+b+c}. \tag{3}$$

Pentru primul termen din membrul stâng avem:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=(a+b)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)=(a+b)\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{3}{ab}\right]=$$
$$=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

(s-a ţinut seama de faptul că $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 4$, $\forall a,b\in\mathbb{R}_+^*$), adică

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Sumând această inegalitate cu analoagele ei, deducem

$$\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2a^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

şi ţinând seama de relaţia $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$, obţinem (3).

Soluţia 5. Putem presupune, fără a resrânge generalitatea, că $a+b+c=1$. Vom utliza inegalitatea

$$\frac{1-x}{x^2}\geq -45x+21,\quad\forall x\geq 0$$

(într-adevăr, $1-x \geq -45x^3+21x^2 \Leftrightarrow 45x^3-21x^2-x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2(5x+1) \geq 0$). Obţinem

$$\sum \frac{a+b}{c^2} = \sum \frac{1-c}{c^2} \geq \sum(-45c+21) \geq -45(a+b+c)+63 = 18.$$

Soluţia 6. Să arătăm mai întâi că

$$\frac{b+c}{a^2} \geq \frac{-24a+21b+21c}{(a+b+c)^2}.$$

Într-adevăr, această inegalitate este echivalentă cu $(b+c)^3+2a(b+c)^2+a^2(b+c) \geq -24a^3+21a^2(b+c) \Leftrightarrow (b+c)^3-2a(b+c)^2+4a(b+c)^2-8a^2(b+c)-12a^2(b+c)+24a^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow (b+c-2a)[(b+c)^2+4a(b+c)-12a^2] \geq 0 \Leftrightarrow (b+c-2a)^2(b+c+6a) \geq 0$, care este adevărată. Avem

$$\sum \frac{b+c}{a^2} = \sum \frac{-24a+21b+21c}{(a+b+c)^2} =$$
$$= \frac{1}{(a+b+c)}[-24(a+b+c)+21(a+b+c)+21(a+b+c)] = \frac{18}{a+b+c}.$$

Soluţia 7. Avem succesiv:

$$\frac{b+c}{a^2} - \frac{6}{a+b+c} = \frac{(b+c)^2+a(b+c)-6a^2}{a^2(a+b+c)} = \frac{(b+c+3a)(b+c-2a)}{a^2(a+b+c)},$$
$$\frac{b+c}{a^2} - \frac{6}{a+b+c} = \frac{(b+c+3a)(b-a)}{a^2(a+b+c)} + \frac{(b+c+3a)(c-a)}{a^2(a+b+c)}.$$

Ca urmare, obţinem:

$$\sum\left(\frac{b+c}{a^2} - \frac{6}{a+b+c}\right) = \sum\left[\frac{(b+c+3a)(b-a)}{a^2(a+b+c)} + \frac{(b+c+3a)(c-a)}{a^2(a+b+c)}\right] =$$
$$= \sum\left[\frac{(b+c+3a)(b-a)}{a^2(a+b+c)} + \frac{(c+a+3b)(a-b)}{b^2(a+b+c)}\right] =$$
$$= \sum \frac{(a-b)(a^2c+a^3+3a^2b-b^3-b^2c-3ab^2)}{a^2b^2(a+b+c)},$$

de unde

$$\sum \frac{b+c}{a^2} - \frac{18}{a+b+c} = \frac{1}{a+b+c}\sum \frac{(a-b)^2(a^2+b^2+4ab+bc+ac)}{a^2b^2}, \tag{4}$$

din care rezultă inegalitatea din enunţ.

Soluţia 8. Vom demonstra inegalitatea

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 4\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right). \tag{5}$$

Apoi, aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi cea armonică, vom avea

$$4\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{4\cdot 9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{18}{a+b+c}\tag{6}$$

şi, combinând cu (5), vom obţine inegalitatea (2).

Revenind la (5), procedăm ca în soluţia precedentă. Prin calcul stabilim că

$$\frac{b+c}{a^2}-\frac{4}{b+c}=\frac{(b+c+2a)(b-a)}{a^2(b+c)}+\frac{(b+c+2a)(c-a)}{a^2(b+c)}$$

şi apoi obţinem că

$$\sum\frac{b+c}{a^2}-4\sum\frac{1}{b+c}=[(a+b)(b+c)(c+a)+2abc]\sum\frac{(a-b)^2}{a^2b^2(b+c)(c+a)}\tag{7}$$

şi, deci, inegalitatea (5) este adevărată.

Inegalitatea (5) se mai poate demonstra utilizând inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică şi inegalitatea $xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$, după cum urmează:

$$\begin{aligned}&\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{4}{a+b}\leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\leq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\\&=2\frac{ab+bc+ca}{abc}\leq 2\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\leq a\frac{2}{bc}+b\frac{2}{ca}+c\frac{2}{ab}\leq\\&\leq a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}.\end{aligned}$$

Observaţii. 1) Inegalităţile (4) şi (5) sunt mai tari decât cea din problemă.

2) Deoarece $a^2+b^2+4ab+bc+ac>(a+b)(a+b+c)$ şi $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$, din (4) şi (6) şi (7) obţinem următoarele rafinări ale inegalităţii (1):

$$\sum\frac{b+c}{a^2}>\frac{18}{a+b+c}+\sum\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2},\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sum\frac{b+c}{a^2}&\geq 4\sum\frac{1}{b+c}+10abc\sum\frac{(a-b)^2}{a^2b^2(b+c)(c+a)}\geq\\&\geq\frac{18}{a+b+c}+10abc\sum\frac{(a-b)^2}{a^2b^2(b+c)(c+a)}.\end{aligned}\tag{9}$$

Nota Redacţiei. La data de 30 iunie a.c. redacţia revistei a primit de la dl. **Ioan Viorel Codreanu** trei soluţii la problema L222. Sunt utilizate inegalitatea mediilor, inegalitatea lui Cebîşev şi inegalitatea lui Bergström într-un mod diferit de cel prezent în Soluţiile 1-3 de mai sus. Regretăm că nu mai putem include şi aceste variante de rezolvare a inegalităţii (1), deoarece nr. 2/2012 era definitivat la data primirii materialului.