# Cum se construieşte un contraexemplu

***Temistocle BÎRSAN***[1]

**Abstract.** In this paper we explain some aspects concerning the construction of a counterexample.

**Keywords:** similar triangles, circle, circumradius, inradius.

**MSC 2010:** 51M04.

Atunci când avem în faţă un subiect şi dorim să facem un studiu asupra lui, vom atinge scopul punnându-se mereu întrebări şi găsind răspunsuri până când rezultatele obţinute se constutuie într-un sistem/teorie ce epuizează (de dorit!) subiectul. Pe parcus, vom fi mereu în situaţia de a vedea dacă o afirmaţie pe care o formulăm este adevărată sau falsă. Pentru a demonstra că o afirmaţie este *adevărată*, deseori folosim diverse metode şi procedee cunoscute, iar uneori trebuie să ne descurcăm cu ,,forţe proprii". Pe de altă parte, pentru a dovedi că o afirmaţie este *falsă*, adesea se indică un **contraexemplu**, fără ca acesta să fie singurul mod de a proceda.

Scopul propus este de a vedea cum se construieşte un **contraexemplu**. Faptul nu este lipsit de interes, căci obţinerea unui contraexemplu poate fi extrem de dificilă. Trebuie ştiut cum să fie desprinse din contextul problemei acele indicii care conduc în final la contraexemplul dorit.

Vom ilustra cele spuse pe un exemplu simplu, accesibil unui elev de clasa a IX-a.

Se ştie: *două triunghiuri sunt asemenea dacă laturile lor corespunzătoare sunt proporţionale.*

**Problemă** (*formulare generală*). *Înlocuind în acest enunţ laturile cu alte trei elemente liniare: o latură şi două înălţimi, o înălţime şi două mediane, două bisectoare şi raza cercului circumscris etc., afirmaţia rezultată va fi adevărată?*

**N.B.** Sugerăm elevilor să încerce un astfel de studiu şi să-l finalizeze ca o Notă proprie pe care s-o trimită spre publicare la redacţia revistei *Recreaţii Matematice.* Nu însă înainte de a citi atent rândurile care urmează!

**Problemă** (*caz particular*). *Două triunghiuri, $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$, care îndeplinesc condiţiile*

$$\frac{a}{a'} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} \tag{1}$$

*sunt asemenea?* (Notaţiile sunt uzuale şi se subînţeleg; elementele triunghiului $A'B'C'$ sunt marcate cu accente.)

Mai întâi, avem: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{R}{R'} \Leftrightarrow \dfrac{2R\sin A}{2R'\sin A'} = \dfrac{R}{R'}$, de unde

$$\sin A = \sin A'. \tag{2}$$

[1]Prof. dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi

Relaţia (2) impune considerarea a două cazuri: $A = A'$ şi $A + A' = \pi$.

*Cazul I:* $A = A'$. Fie $\alpha$ valoarea comună rapoartelor din (1). Fie $E$ punctul de tangenţă cu latura $AC$ a cercului înscris în $\triangle ABC$, iar $E'$ punctul cu semnificaţie similară relativ la $\triangle A'B'C'$.

Se ştie că $AE = p - a = r \operatorname{ctg} \dfrac{A}{2}$; analog, $A'E' = p' - a' = r' \operatorname{ctg} \dfrac{A'}{2}$. Cum $A = A'$, obţinem $\dfrac{AE}{A'E'} = \dfrac{p-a}{p'-a'} = \dfrac{r}{r'}$ şi, ţinând seama de (1), deducem că $\dfrac{p-a}{p'-a'} = \dfrac{a}{a'}$. Ca urmare, $\dfrac{p}{p'} = \dfrac{a}{a'}$ din care rezultă că

$$\frac{p}{p'} = \alpha \tag{3}$$

şi

$$\frac{b+c}{b'+c'} = \alpha. \tag{4}$$

Din (1) şi (3) avem că $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{pr}{p'r'} = \alpha^2$, deci

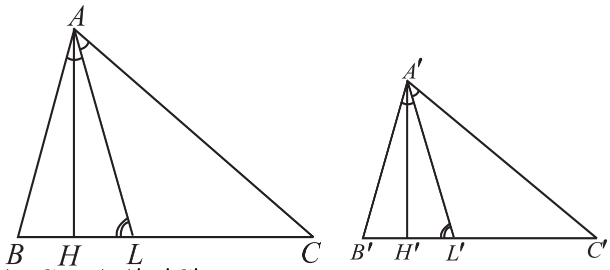
$$\frac{S}{S'} = \alpha^2. \tag{5}$$

Cu aceste pregătiri vom arăta că

$$\frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{l_a}{l_{a'}} = \alpha. \tag{6}$$

Într-adevăr, $\dfrac{h_a}{h_{a'}} = \dfrac{2S}{a} \cdot \dfrac{a'}{2S'} = \alpha^2 \dfrac{1}{\alpha} = \alpha$. Lungimile bisectoarelor sunt date de $l_a = \dfrac{2bc}{b+c} \cos \dfrac{A}{2}$ şi $l_{a'} = \dfrac{2b'c'}{b'+c'} \cos \dfrac{A'}{2}$, deci $\dfrac{l_a}{l_{a'}} = \dfrac{bc}{b'c'} \cdot \dfrac{b'+c'}{b+c} = \dfrac{S}{S'} \cdot \dfrac{b'+c'}{b+c} = \alpha^2 \cdot \dfrac{1}{\alpha} = \alpha$.

Relaţiile (6) implică asemănarea triunghiurilor dreptunghice $AHL$ şi $A'H'L'$, unde $H$ şi $L$ sunt picioarele înălţimii şi respectiv bisectoarei duse din vârful $A$, iar $H'$ şi $L'$ au aceleaşi semnificaţii în $\triangle A'B'C'$. Rezultă că $\widehat{HLA} \equiv \widehat{H'L'A'}$ şi apoi, fiind în cazul $A = A'$, deducem că $\triangle ABL \sim \triangle A'B'L'$. În consecinţă, $B = B'$ şi, cu $A = A'$, obţinem că $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.




Din cele demonstrate în rândurile precedente, desprindem următoarele afirmaţii:

**Propoziţia 1.** *Dacă triunghiurile $ABC$ şi $A'B'C'$ au $A = A'$ şi $\dfrac{h_a}{h_{a'}} = \dfrac{l_a}{l_{a'}}$, atunci ele sunt asemenea.*

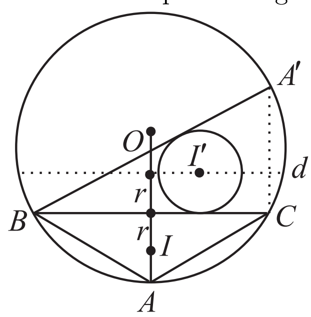
**Propoziţia 2.** *Dacă triunghiurile $ABC$ şi $A'B'C'$ sunt fie ascuţiunghice fie obtuzunghice şi îndeplinesc condiţiile* (1)*, atunci ele sunt asemenea.*

*Cazul al II-lea*: $A + A' = \pi$. Am ajuns la situaţia în care va fi nevoie de un contraexemplu pentru a duce la capăt studiul propus.

Într-adevăr, după mai multe tentative eşuate de a dovedi că triunghiurile sunt asemena şi în acest caz, apare de la sine **îndoiala**: *nu cumva în acest caz triunghiurile pot să nu fie asemenea*? Pentru ca îndoiala să devină **certitudine** va trebuie să găsim un **contraexemplu**: *să găsim două triunghiuri, unul ascuţitunghic şi unul obtuzunghic cu $A + A' = \pi$ şi condiţiile* (1) *îndeplinite.* Vom face acest lucru, dar nu încercând să ,,ghicim" (n-am avea nicio şansă!).

În primul pas, vom face unele simplificări, pentru ca găsirea celor două triunghiuri să fie mai comodă. În acest sens, vom lua 1 valoarea comună rapoartelor din (1), adică ne propunem să găsim două triunghiuri, unul ascuţiunghic şi altul obtuzunghic, cu $A + A' = \pi$, $a = a'$, $R = R'$, $r = r'$ (adică, să arătăm că pot să nu fie congruente două triunghiuri care au congruente câte o latură, razele $R$ şi $R'$, precum şi razele $r$ şi $r'$). Mai mult, nu ne mulţumim cu simplificarea adusă de trecerea de la ,,asemănare" la ,,congruenţă" şi în plus presupunem că $R = R' = 1$, iar cercurile circumscrise celor două triunghiuri coincid. Aşadar, acum *căutăm două triunghiuri înscrise într-un cerc de rază egală cu* 1*, unul ascuţiunghic şi altul obtuzunghic şi care au razele cercurilor înscrise lor egale.*

În al doilea pas, alegem ca triunghi obtuzunghic cel mai simplu triunghi înscris în cercul de centru $O$ şi rază egală cu 1: zicem noi că acesta este $\triangle ABC$ isoscel şi cu $A = 120°$. Suntem acum în faţa unei probleme relativ uşoare: *să se găsească un punct $A' \in \widehat{BC}$ (arcul ce nu conţine $A$) astfel încât $\triangle A'BC$ să îndeplinească condiţia $r' = r$.* Intuiţia ne spune că există un astfel de triunghi: un cerc de rază $r$ şi tangent la $BC$, cu centrul $I'$ pe dreapta $d$ aflată la distanţa $r$ de $BC$ (în semiplanul determinat de $BC$ ce nu conţine punctul $A$) poate fi rostogolit până când şi latura $A'C$ va fi tangentă acestuia.




În pasul al treilea determinăm riguros, printr-un calcul elementar, triunghiul $A'BC$ găsit intuitiv în pasul precedent.

În ce priveşte $\triangle ABC$ avem $b = c = 1$ (raza cercului), $a = \sqrt{3}$ (latura triunghiului echilateral înscris), $R = 1$, $p = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $S = \sqrt{\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3)$.

Despre $\triangle A'BC$ ştim că $A' = 60°$, $a' = \sqrt{3}$, $R' = 1$, $r' = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3)$ şi urmează să determinăm $b'$ şi $c'$. Utilizăm formula $p' - a' = r' \operatorname{ctg} \dfrac{A'}{2}$, obţinem $p' - a' = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3) \operatorname{ctg} 30° = \dfrac{3}{2}(2 - \sqrt{3})$ şi apoi $p' = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; ca urmare, $b' + c' = 2p' - a' =$

$2(3-\sqrt{3})$, adică (*) $b'+c'=2(3-\sqrt{3})$. Utilizând formula $a'b'c'=4R'r'p'$, obţinem (**) $b'c'=15-8\sqrt{3}$. Relaţiile (*) şi (**) arată că $b'$, $c'$ sunt soluţiile ecuaţiei de gradul doi $t^2-2(3-\sqrt{3})t+15-8\sqrt{3}=0$ şi deci $b'=3-\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, $c'=3-\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

În concluzie, *dacă triunghiurile $ABC$ şi $A'B'C'$ îndeplinesc condiţiile (1) şi $A+A'=\pi$, nu rezultă că sunt asemenea,* după cum arată perechea următoare de triunghiuri: $\triangle ABC$ cu $a=\sqrt{3}$, $b=c=1$ şi $\triangle A'B'C'$ cu $a'=\sqrt{3}$, $b'=3-\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, $c'=3-\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ (cititorul va verifica cu uşurinţă îndeplinirea condiţiilor (1) cu $\alpha=1$).

**Observaţie.** La contraexemplul căutat s-a ajuns prin particularizări succesive şi convenabile, care au condus în final la o problemă simplă şi uşor de rezolvat.

**Comentariu.** În [**1**], p.16, este dat rezultatul următor:

*O condiţie necesară şi suficientă de existenţă a unui triunghi cu elementele $a, R$ şi $r$ este*

$$(E) \qquad \frac{4a^2r}{a^2-4r^2} \geq 2R+\sqrt{4R^2-a^2}, \quad \text{pentru } a>2r \text{ şi } 2R\geq a.$$

(Se specifică că acest rezultat este luat din [**2**].)

Arătăm că relaţiile $(E)$ nu sunt necesare şi nici suficiente cu următoarele contraexemple:

Triunghiurile cu laturile $a=\sqrt{3}$, $b=c=1$, adică $\triangle ABC$ de mai sus, are $R=1$, $r=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-3)$, verifică $a>2r$ şi $2R\geq a$, dar nu verifică prima inegalitate din $(E)$. (Şi $\triangle A'BC$ poate fi folosit în acelaşi scop – au aceleaşi $a, R$ şi $r$). Deci condiţia $(E)$ nu este necesară.

Numerele $a=\sqrt{3}$, $R=1$ şi $r=\sqrt{3}-1$ verifică $(E)$, dar nu formează un triunghi (căci inegalitatea Euler $R\geq 2r$ nu are loc); deci condiţia $(E)$ nu-i suficientă pentru existenţa unui triunghi.

**Bibliografie**


1. **D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, V. Volenec** – *Recent Advances in geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
2. **G. Petrov** – *O podmínkách konstrukce trojúhelníku,* Časopis pro pěstováni matematiky, 77 (1952), 77-92.


---