Comentarii pe marginea unei probleme

Neculai ROMAN[1]

Abstract. The author shows how a simple problem of elementary geometry may be a source of new problems and results.

Keywords: equilateral triangle, orthocenter, incenter.

MSC 2000: 51M04.

La *Concursul "Al. Myller"*, ed. a VIII-a, 2010, elevii din cl. a VII-a au fost puşi în faţa problemei (v. *Recreaţii Matematice*, 2/2010, p.134):

($\mathcal{P}$): *Se consideră triunghiul ABC în care $AB = AC$ şi fie M mijlocul segmentului $[BC]$. Punctele D şi E sunt picioarele perpendicularelor din M pe dreptele AC, respectiv AB, iar H este mijlocul segmentului $[DE]$. Fie punctele $P, Q \in BC$ astfel încât $MQ = MP = MD$ şi $P \in (BM)$. Arătaţi că punctul H este ortocentrul triunghiului APQ.*

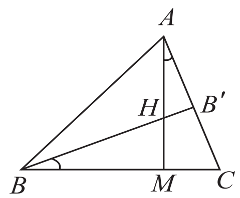
Constatăm că problema ($\mathcal{P}$) are trei elemente constitutive: 1) un triunghi ABC, 2) un punct $M \in BC$ şi 3) un triunghi APQ (construit astfel: D, E fiind proiecţiile lui M pe AC, respectiv AB, atunci punctele $P, Q \in BC$ cu $P \in (BM)$ sunt determinate prin $MP = ME$ şi $MQ = MD$), iar rezultatul problemei ($\mathcal{P}$) are structura: în anumite ipoteze relativ la triunghiul ABC şi punctul M, urmează o anumită proprietate pentru triunghiul APQ.

Astfel privită, ($\mathcal{P}$) devine o sursă de noi probleme şi rezultate. Într-adevăr, punctul M, care în ($\mathcal{P}$) este mijlocul laturii $[BC]$, poate fi luat picior de înălţime, bisectoare etc. Relativ la triunghiul APQ putem avea în vedere proprietăţi ca: este isoscel, are otrocentrul sau alt punct important pe DE, $AM \perp DE$ etc. În această configuraţie există suficient loc pentru curiozitatea şi imaginaţia oricui, iar pentru descoperirea proprietăţilor ei este nevoie de curaj, muncă, răbdare.

Pregătim rezolvarea problemei ($\mathcal{P}$) cu următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi oarecare şi M piciorul înălţimii din A pe BC. Atunci, un punct $H \in AM$ este ortocentrul triunghiului ABC dacă şi numai dacă $MB \cdot MC = MH \cdot MA$.*

Demonstraţie. Dacă H este ortocentru, avem $\triangle HMB \sim \triangle CMA$ şi, deci, $\dfrac{HM}{MC} = \dfrac{MB}{MA}$, de unde rezultă relaţia dorită.



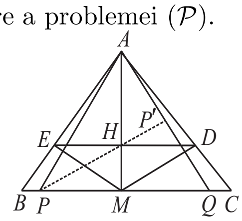
Fie, acum, $B' \in BH \cap AC$. Din $AM \perp BC$ şi $MB \cdot MC = MH \cdot MA$ rezultă că $\triangle HMB \sim \triangle CMA$, deci unghiurile marcate sunt congruente şi $BB' \perp AC$, i.e. H este ortocentru.

[1]Profesor, Şcoala "V. Alecsandri", Mirceşti (Iaşi)

Demonstraţia afirmaţiei problemei ($\mathcal{P}$). Din simetria figurii rezultă că $DE \| BC$ şi $H \in AM$. Cu teorema catetei obţinem $MD^2 = MA \cdot MH$, de unde $MP \cdot MQ = MA \cdot MH$. Conform Lemei, deducem că H este ortocentrul triunghiului APQ.

Observaţie. Rezolvarea dată problemei ($\mathcal{P}$) diferă de cea oficială (din barem).

În continuare, vom prezenta câteva reciproce şi o generalizare a problemei ($\mathcal{P}$).



Reciproca 1. *Fie M piciorul înălţimii din vârful A al triunghiului ABC, D şi E proiecţiile lui M pe AC, respectiv AB şi punctele $P, Q \in BC$ astfel încât $MP = ME$, $MQ = MD$ şi $P \in (BM)$. Dacă $\triangle APQ$ este isoscel de vârf A, atunci şi $\triangle ABC$ este isoscel.*

Demonstraţie. În condiţiile enunţului, $AM \perp BC$ implică faptul că $[MP] \equiv [MQ]$. Deci $[ME] \equiv [MD]$ şi $[AM]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Cum aceasta este şi înălţime în $\triangle ABC$, rezultă că triunghiul este isoscel.

Reciproca 2. *Considerăm un punct $M \in (BC)$ şi fie punctele D, E, P, Q construite ca în Reciproca 1. Dacă $\triangle APQ$ este isoscel de vârf A şi $AM \perp DE$, atunci şi $\triangle ABC$ este isoscel.*

Demonstraţie. În cercul circumscris patrulaterului $AEMD$ diametrul $[AM]$ şi coarda $[DE]$ sunt perpendiculare, deci $[ME] \equiv [MD]$. Ca urmare, $[MQ] \equiv [MP]$, deci $AM \perp BC$. Conform Reciprocei 1, rezultă că $\triangle ABC$ este isoscel.

Reciproca 3. *Considerăm un punct $M \in (BC)$ şi fie punctele D, E, P, Q construite ca în Reciproca 1. Dacă punctul $H = AM \cap DE$ este ortocentrul triunghiului APQ, atunci $\triangle ABC$ este isoscel.*

Demonstraţie. Evident, $[AM]$ este înălţime în $\triangle ABC$. Ca urmare, DE este antiparalelă cu BC (fapt cunoscut şi uşor de dovedit!). Fie $P' = PH \cap AQ$. În triunghiul dreptunghic $PP'C$ avem: $\operatorname{tg}\widehat{P'QP} \cdot \operatorname{tg}\widehat{P'PQ} = 1$. Dar

$$\operatorname{tg}\widehat{P'QP} = \frac{AM}{MQ} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{\cos C} \text{ şi}$$

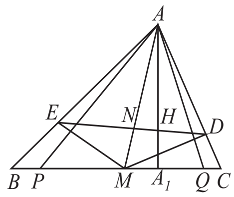
$$\operatorname{tg}\widehat{P'PQ} = \frac{HM}{MP} = \frac{HM}{ME} = \frac{\sin\widehat{MEH}}{\sin\widehat{MHE}} = \frac{\cos C}{\sin(90^\circ - B + C)} = \frac{\cos C}{\cos(B - C)}.$$

Ca urmare, $\dfrac{1}{\cos C} \cdot \dfrac{\cos C}{\cos(B - C)} = 1$, de unde $\cos(B - C) = 1$ şi, deci, $B = C$.

În rezultatele precedente punctul $M \in (BC)$ apărea (de la bun început sau pe parcurs!) ca fiind piciorul înălţimii din A. La începutul notei au fost sugerate câteva direcţii de investigare a configuraţiei în discuţie. Cititorul atras şi dornic de aventuri în câmpul geometriei este îndemnat să-şi croiască propriul traseu. Noi vom încheia cu un rezultat în care punctului M i se atribuie o altă poziţie pe latura $[BC]$.

Fie ABC un triunghi oarecare şi $M \in BC$ piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{A}$. Se consideră punctele D, E, P, Q ca în reciprocele de mai sus şi punctul H ca intersecţie *a dreptei DE cu perpendiculara din A pe BC. Atunci H este ortocentrul triunghiului APQ.*

Demonstraţie. Presupunem că unghiurile $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ sunt ascuţite (alte cazuri se tratează similar sau sunt triviale). Fie A_1 proiecţia punctului A pe BC şi N mijlocul segmentului $[DE]$.



Din faptul că $[AM]$ este bisectoare, deducem că $\triangle AED$ este isoscel. Cum $[AN]$ este mediană în $\triangle AED$ isoscel, rezultă că $[AN]$ este bisectoare şi, deci, $N \in AM$.

Avem cu teorema catetei,

$$MP^2 = MD^2 = MA \cdot MN; \tag{1}$$

de asemenea, scriind în două moduri puterea punctului A_1 faţă de cercul circumscris patrulaterului $PEDQ$, are loc egalitatea

$$A_1P \cdot A_1Q = MP^2 - MA_1^2. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că

$$A_1P \cdot A_1Q = MA \cdot MN - MA_1^2. \tag{3}$$

Dar $AN \cdot AM = AA_1 \cdot AH$ (puterea lui A faţă de cercul circumscris patrulaterului A_1HNM) sau

$$AM(AM - MN) = AA_1(AA_1 - A_1H) \Leftrightarrow AM^2 - MA \cdot MN = AA_1^2 - A_1A \cdot A_1H \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AA_1^2 + MA_1^2 - MA \cdot MN = AA_1^2 - A_1A \cdot A_1H \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow MA_1^2 = MA \cdot MN - A_1A \cdot A_1H. \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă că $A_1P \cdot A_1Q = A_1A \cdot A_1H$, deci, conform Lemei, H este ortocentrul triunghiului APQ.

Observaţie. Acest rezultat reprezintă o generalizare a problemei $(\mathcal{P})$.

Vizitaţi pagina web a revistei *Recreaţii Matematice*:

http://www.recreatiimatematice.ro