CHESTIUNI METODICE

O problemă şi ... nouă soluţii

Gheorghe IUREA[1], **Gabriel POPA**[2]

În numărul 2/2007 al Recreaţiilor Matematice, **Enache Pătraşcu** a propus spre rezolvare problema

G133. *Fie $\triangle ABC$ echilateral şi D un punct astfel încât $BD = DC$, $m(\widehat{BDC}) = 30^\circ$, iar BC separă A şi D. Dacă $E \in (BD)$ cu $m(\widehat{BAE}) = 15^\circ$, să se arate că $CE \perp AC$.*

Soluţia autorului problemei (prezentată mai jos) recurge la o construcţie ajutătoare interesantă, dar greu de găsit. Încercările de a aborda problema într-un mod diferit au fost încununate de succes într-o măsură mai mare decât ne aşteptam; în cele ce urmează pot fi găsite nouă soluţii ale problemei, iar cititorul probabil că va mai observa şi altele.

Soluţia 1. Notăm cu A' simetricul lui A faţă de BC. Observăm că $m(\widehat{EBA'}) = m(\widehat{EBC}) - m(\widehat{A'BC}) = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$, prin urmare $\widehat{EBA'} \equiv \widehat{EAA'}$. Deducem că patrulaterul $ABEA'$ este inscriptibil, de unde $\widehat{EA'B} \equiv \widehat{EAB}$, adică $m(\widehat{EA'B}) = 15^\circ$. Obţinem astfel că $\triangle EBA'$ este isoscel cu $EB = EA'$ şi de aici rezultă că E se află pe mediatoarea segmentului $[BA']$, deci $CE \perp BA'$. Este însă clar că $BA' \parallel AC$, prin urmare $CE \perp AC$ (fig. 1).

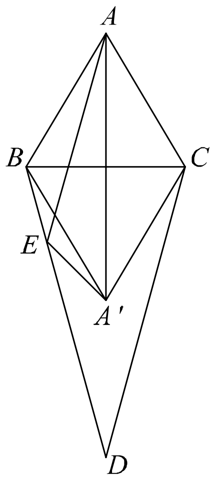

Fig. 1

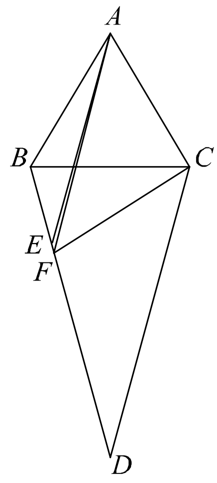

Fig. 2

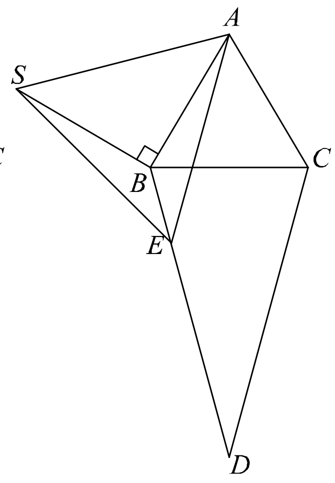

Fig. 3

Soluţia 2 (Sergiu Prisacariu, Cristian Lazăr). Fie $F \in (BD)$ astfel încât $CF \perp AC$; atunci $m(\widehat{BCF}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ şi cum $m(\widehat{CBF}) = 75^\circ$, deducem că $m(\widehat{CFB}) = 75^\circ$. Rezultă că $CB = CF$, de unde $CA = CF$, adică $\triangle CAF$ este

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Dimitrie Cantemir", Iaşi
[2] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

dreptunghic isoscel, cu $m(\widehat{CAF}) = 45°$. Astfel, $m(\widehat{BAF}) = 60° - 45° = 15°$, prin urmare $m(\widehat{BAF}) = 15°$ şi astfel $F = E$, de unde concluzia problemei (fig. 2).

Soluţia 3 (Enache Pătraşcu). Considerăm punctul S pentru care $AB = BS$, $AB \perp BS$, iar AB separă C şi S. Cum $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{SBE}) = 135°$, deducem că $\triangle ABE \equiv \triangle SBE$ (L.U.L.), de unde $AE = SE$. Însă $m(\widehat{SAE}) = 45° + 15° = 60°$, deci $\triangle ASE$ este echilateral. Rezultă că $\triangle ABS \equiv \triangle ACE$ ($SA = AE$, $AB = AC$, iar $m(\widehat{SAB}) = m(\widehat{EAC}) = 45°$), prin urmare $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ABS}) = 90°$ (fig. 3).

Soluţia 4 (după o idee dată de **Cătălin Budeanu).** Vom calcula laturile $\triangle ACE$ în funcţie de $a = AB$. Mai întâi, observăm că, dacă $\{M\} = AD \cap BC$, avem că $AD = AM + MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2\operatorname{tg} 15°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2\left(2-\sqrt{3}\right)} = a\left(1+\sqrt{3}\right)$. Apoi, cum AE este bisectoare în $\triangle ABD$, atunci $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ şi, pe de altă parte, $AE = \dfrac{2 \cdot AB \cdot AD}{AB + AD} \cos 15° = \dfrac{2a^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{a\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = a\sqrt{2}$. Folosind relaţia lui Stewart în $\triangle BCD$, obţinem că $CE^2 \cdot BD = BC^2 \cdot DE + CD^2 \cdot BE - BE \cdot DE \cdot BD$. Am văzut mai sus că $BE = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot ED$; după calcule de rutină, deducem că $CE = a$. În concluzie, $CA = CE = a$ şi $AE = a\sqrt{2}$ şi, din reciprova teoremei lui Pitagora, rezultă că $EC \perp AC$ (fig. 4).

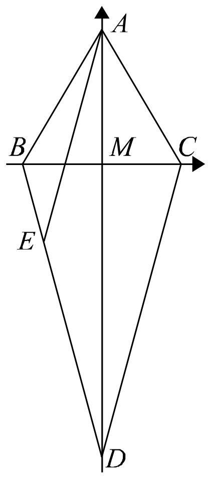

Fig. 4

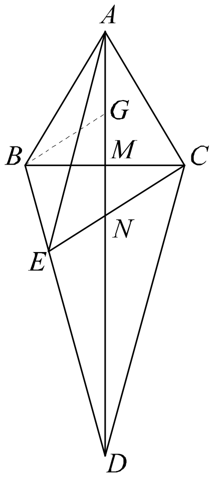

Fig. 5

Soluţia 5. Fie $\{N\} = AD \cap CE$ şi G centrul triunghiului ABC; ca în soluţia precedentă, avem că $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, de unde, folosind proporţiile derivate, obţinem că $\dfrac{DE}{DB} = \sqrt{3}-1$. Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle BMD$ cu transversala $E-N-C$; deducem că $\dfrac{BE}{ED} \cdot \dfrac{DN}{NM} \cdot \dfrac{MC}{CB} = 1$, de unde $\dfrac{DN}{NM} = 2\left(\sqrt{3}+1\right)$. După calcule de rutină, rezultă că $DN = \dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$, $DG = \dfrac{a\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2}$, şi atunci $\dfrac{DN}{DG} = \sqrt{3}-1$. În concluzie, $\dfrac{DE}{DB} = \dfrac{DN}{DG}$ şi din reciproca teoremei lui Thales obţinem că $NE \parallel BG$, prin urmare $NE \perp AC$, tocmai concluzia problemei (fig. 5).

Soluţia 6. Folosim teorema sinusurilor în triunghiurile ABE şi BCD, obţinând că $\dfrac{BE}{\sin 15^\circ} = \dfrac{AB}{\sin 30^\circ}$, respectiv $\dfrac{BC}{\sin 30^\circ} = \dfrac{BD}{\sin 75^\circ}$. Se verifică prin calcul faptul că $\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ}$, deci $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BC}{BD}$. Cum $AB = BC$ şi $\widehat{CBE} \equiv \widehat{CBD}$, urmează că $\triangle CBE \sim \triangle DBC$, prin urmare $m(\widehat{BCE}) = 30^\circ$, de unde $m(\widehat{ACE}) = 90^\circ$ (fig. 4).

Soluţia 7. Raportăm planul la un reper cu originea în M, unde $M = AD \cap BC$; dacă $a = AB$, atunci $A\left(0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $D\left(0, \dfrac{-a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\right)$. Observăm că $\triangle EAD$ este isoscel, deoarece $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EDA}) = 15^\circ$, prin urmare ordonata lui E va fi media aritmetică a ordonatelor punctelor A şi D, adică $y_E = -\dfrac{a}{2}$. Cum punctele B, E, D sunt coliniare, avem că $\dfrac{y_E - y_B}{y_D - y_B} = \dfrac{x_E - x_B}{x_D - x_B}$, de unde $x_E = \dfrac{a\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}$. Panta dreptei AC este $m_{AC} = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = -\sqrt{3}$, iar panta dreptei CE este $m_{CE} = \dfrac{y_C - y_E}{x_C - x_E} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ şi, cum $m_{AC} \cdot m_{CE} = -1$, rezultă că $CE \perp AC$ (fig. 4).

Soluţia 8. Folosim reperul din soluţia precedentă, lucrând însă cu numere complexe. Pentru simplitate, vom considera că $AB = 2$; atunci $C(1)$, $B(-1)$, $A\left(\sqrt{3}i\right)$, $D\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right)$. Cum $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = k$, avem $z_E = \dfrac{z_B + kz_D}{1+k} = \left(1-\sqrt{3}\right) - i$. Rezultă că $\dfrac{z_E - z_C}{z_A - z_C} = i$, prin urmare $CE \perp AC$ (şi, în plus, $CE = AC$) (fig. 4).

Soluţia 9. Din $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, obţinem că $\overrightarrow{CE} = \dfrac{\overrightarrow{CB} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{CD}}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} =$
$= \dfrac{2\overrightarrow{CB} + \left(\sqrt{3}-1\right)\overrightarrow{CD}}{\sqrt{3}+1}$, deci $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\left(2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \left(\sqrt{3}-1\right)\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}\right)$. Însă $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \cdot CA \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{CA} = CA^2 - AD \cdot AC \cdot \cos\widehat{CAD} = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}a^2$. Astfel, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, de unde $CE \perp CA$ (fig. 4).

Notă. Soluţia 6 sugerează următoarea extindere:

Se consideră $\triangle ABC$ isoscel ($AB = BC$) şi triunghiul BCD cu A, D în semiplane opuse faţă de BC, iar $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{BDC})$. Dacă $E \in (BD)$ are proprietatea că $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+x)} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\beta+\frac{x}{2}\right)}$, unde $\alpha = m(\widehat{BAE})$, $\beta = m(\widehat{CBD})$ şi $x = m(\widehat{ABC})$, atunci $CE \perp AC$.

Problema G133 se obţine pentru $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 75^\circ$ şi $x = 60^\circ$.