Asupra unei probleme de concurs

Julieta GRIGORAŞ[1]**, Claudiu-Ştefan POPA**[2]

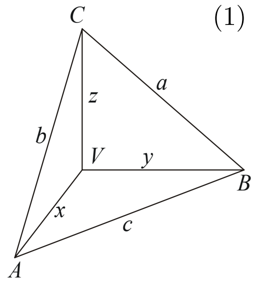
În cele ce urmează vom vedea *cum se face o Notă* plecând de la o problemă simplă şi comună şi utilizând mijloace elementare. Aşadar, un îndemn la creativitate... Punctul de pornire este cea de-a doua problemă propusă la *Concursul "Florica T. Câmpan"*, etapa judeţeană, clasa a VIII-a, al cărei enunţ poate fi găsit în acest număr al revistei la pag. 116

Cerinţa de la primul punct al acestei probleme este, după cum au observat şi câţiva candidaţi, o consecinţă imediată a faptului că, în ipoteza problemei, piramida considerată este una regulată. Vom indica şi alte condiţii, asemănătoare celei din problema sursă, care să implice o piramidă regulată. Mai întâi însă, vom reformula şi vom rezolva problema iniţială.

Problema 1. *Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu $VA \perp VB \perp VC \perp VA$. Notăm $x = VA$, $y = VB$, $z = VC$, $a = BC$, $b = AC$ şi $c = AB$. În ipoteza că*

$$xa = yb = zc, \tag{1}$$

piramida $VABC$ este regulată.



Soluţie. Cum $a = \sqrt{y^2+z^2}$, $b = \sqrt{x^2+z^2}$, $c = \sqrt{x^2+y^2}$ $(*)$, condiţia (1) devine $x^2\left(y^2+z^2\right) = y^2\left(x^2+z^2\right) = z^2\left(x^2+y^2\right)$. După desfacerea parantezelor şi reducerea lui x^2y^2, din prima egalitate obţinem că $x = y$ şi analog $y = z$, prin urmare $VA = VB = VC$. Apoi, $a = b = c = x\sqrt{2}$ şi deducem că $VABC$ este piramidă regulată.

Problema 2. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},^{3} \tag{2}$$

atunci $VABC$ este piramidă regulată.

Soluţie. Din (2) obţinem, folosind $(*)$ şi proprietatea şirului de rapoarte egale, că $\dfrac{x^2}{y^2+z^2} = \dfrac{y^2}{x^2+z^2} = \dfrac{z^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \dfrac{1}{2}$, de unde $2x^2 = y^2+z^2$, $2y^2 = x^2+z^2$ şi $2z^2 = x^2+y^2$. Scăzând două câte două aceste relaţii, rezultă că $x = y = z$ şi apoi $a = b = c = x\sqrt{2}$.

Problema 3. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$x + a = y + b = z + c,^{3} \tag{3}$$

atunci $VABC$ este piramidă regulată.

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic "V. Alecsandri", Iaşi
[2] Profesor, Şcoala "A. Russo", Iaşi

[3] **Nota redacţiei.** Un tetraedru (arbitrar) care verifică condiţia $VA \perp VB \perp VC \perp VA$ se numeşte *tridreptunghic*, care verifică (2) – *izodinamic*, iar care verifică (3) – *Crelle* (**D.Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, pp. 245, 255, 251).

Soluţie. Observăm, ţinând seama de ($*$), că

$$(3) \Leftrightarrow x^2+a^2+2xa=y^2+b^2+2yb=z^2+c^2+2zc \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+\left(y^2+z^2\right)+2xa=y^2+\left(x^2+z^2\right)+2yb=z^2+\left(x^2+y^2\right)+2zc \Leftrightarrow (1)$$

şi astfel Problema 3 se reduce la Problema 1.

Problema 4. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$|x-a|=|y-b|=|z-c|, \tag{4}$$

atunci $VABC$ este priramidă regulată.

Soluţie. Calculele sunt analoage cu cele din soluţia Problemei 3.

Apare întrebarea: ce se întâmplă dacă înlocuim a, b, c cu o permutare oarecare a lor? Vom arăta că şi în această situaţie piramida este regulată.

Problema 1′. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$xb=yc=za, \tag{1'}$$

priramida $VABC$ este regulată.

Soluţie. Observăm întâi că, dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale, rezultă uşor că sunt egale toate trei; prin urmare, a, b şi c sunt fie distincte două câte două, fie egale între ele. Presupunem prin absurd că ne putem situa în primul caz şi vom ordona numerele a, b, c; fie $a<b<c$. Atunci:

$$a^2<b^2<c^2 \Leftrightarrow z^2+y^2<x^2+z^2<x^2+y^2 \Leftrightarrow z<y<x.$$

Pe de altă parte, din ($1'$) rezultă că $z>x>y$ şi ajungem astfel la o contradicţie. Rămâne că $a=b=c$, apoi $x=y=z$, deci $VABC$ este piramidă regulată.

Problema 2′. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}=\frac{z}{a}, \tag{2'}$$

atunci $VABC$ este piramidă regulată.

Soluţie. Avem succesiv:

$$(2') \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+z^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{z^2}{y^2+z^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+z^2-x^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2-y^2}=$$
$$=\frac{z^2}{y^2+z^2-z^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{z^2}=\frac{y^2}{x^2}=\frac{z^2}{y^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1,$$

de unde $x=y=z$, apoi $a=b=c$.

Observaţie. Dacă înlocuim ($2'$) cu $\dfrac{x}{c}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{b}$ ($2''$), concluzia se păstrează cu aceleaşi calcule. Dacă însă înlocuim ($2'$) cu $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{c}=\dfrac{z}{b}$ ($2'''$), concluzia se păstrează, cu o justificare puţin diferită:

$$(2''') \Leftrightarrow \frac{x^2}{z^2+y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{z^2}{x^2+z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2=y^2+z^2,\ 2y^2=x^2+y^2,\ 2z^2=x^2+z^2 \Leftrightarrow x=y=z.$$

Lăsăm în seama cititorului formularea problememlor $3'$ şi $4'$; soluţiile lor sunt similare cu cele ale Problemei $1'$.

Concluzionăm că, dacă $x*u=y*v=z*t$, unde "$*$" este una dintre operaţiile aritmetice $+$, $-$, $\cdot$, $:$, iar u, v, t rezprezintă o permutare oarecare a numerelor a, b, c, atunci piramida este regulată. Se obţin în acest fel 24 de probleme distincte.