CHESTIUNI METODICE

Cea mai bună inegaliate de acest tip ...

Marian TETIVA[1]

1. Introducere. Aţi întâlnit cu siguranţă asemenea enunţ (mai ales dacă vă preocupă şi probleme mai grele, "de olimpiadă"). Iată trei astfel de exemple:

1. *Cea mai bună inegalitate de tipul*

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \geq k[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz], \quad \forall x, y, z > 0$$

se obţine pentru $k = 4$ (este aşa-numita *inegalitate a lui Schur*).

2. *Cea mai bună inegalitate de tipul*

$$p \leq kR + hr$$

care are loc în orice triunghi se obţine pentru $k = 2$ *şi* $h = 3\sqrt{3} - 4$ (se numeşte *inegalitatea lui Blundon* în acest caz).

3. *Cea mai bună inegalitate de forma*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq kR^2 + hr^2$$

şi care are loc, iarăşi, în orice triunghi este cea obţinută pentru $k = 8$ *şi* $h = 4$.

Cum se abordează o asemenea problemă? Răspundem imediat la această întrebare rezolvând-o pe prima (a se vedea şi [**2**], problema 9.22, un pic altfel formulată acolo); celelalte sunt soluţionate în [**3**], respectiv [**1**]. Iată mai departe soluţia problemei 1.

Trebuie să înţelegem bine enunţul; observăm că expresia din membrul drept

$$(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz,$$

are numai valori nenegative, conform unei inegalităţi cunoscute. De aceea

$$k_1[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz] \leq k_2[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz]$$

pentru $x, y, z > 0$ şi $k_1 \leq k_2$, aşa că problema noastră este, de fapt, problema găsirii celui mai mare număr k astfel încât inegalitatea

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \geq k[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz]$$

să fie adevărată pentru orice $x, y, z > 0$. De obicei într-o asemenea chestiune, se caută mai întâi cea mai mare valoare posibilă a lui k (cea mai mică, în alte cazuri), dând valori particulare variabilelor, apoi se demonstrează inegalitatea rezultată pentru valoarea extremă depistată pentru k. Cel mai comun (şi comod) este să egalăm variabile; în cazul de faţă, să punem $y = z = 1$ şi $x > 0$ arbitrar. Obţinem inegalitatea

$$(x+2)^3 - 27x \geq k[(x+2)(2x+1) - 9x] \Leftrightarrow (x-1)^2(x+8) \geq 2k(x-1)^2,$$

care trebuie să aibă loc pentru orice $x > 0$ (pentru că inegalitatea iniţială vrem să aibă loc pentru orice $x, y, z > 0$). De fapt asta înseamnă $x + 8 \geq 2k$, pentru orice $x \neq 1$ şi, în ultimă instanţă, pentru orice $x > 0$. Aici are loc de obicei un proces de trecere la limită, pentru a obţine cel mai bun k. Limita se calculează, uneori, în puncte care sunt capete ale intervalelor pe care rezultă inegalitatea finală; în cazul de faţă, pentru $x \to 0$, obţinem $k \leq 4$. (Evident, aici trecerea la limită în 0 nu era

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

strict necesară, căci x, y, z pot fi considerate ≥ 0 - nu neapărat strict pozitive - şi raţionamentul funcţionează la fel). Astfel am aflat că, probabil, cea mai bună valoare a lui k este 4; numai dacă reuşim să demonstrăm inegalitatea pentru $k = 4$ putem trage concluzia finală, cum că "cea mai bună inegalitate de tipul"

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \geq k[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz], \quad \forall x, y, z > 0$$

se obţine pentru $k = 4$. Ori, înlocuind această valoare a lui k, ajungem la

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2, \quad \forall x, y, z > 0,$$

inegalitate bine cunoscută (numită uneori *"inegalitatea lui Schur"*, aşa cum am mai spus), care apare în multe cărţi (inclusiv în [**2**]), deci nu o mai demonstrăm aici.

2. Din nou despre normare. Iniţial această lucrare s-a vrut o continuare a notei [**4**]. Între timp, s-a ivit această nouă inegalitate (vom arăta la urmă prin ce concurs de împrejurări am ajuns la ea) care s-a lăsat rezolvată cu metoda normării (nu ezitaţi să o folosiţi şi pentru *inegalitatea lui Schur*! de fapt, aşa e făcută şi în [**2**]) şi, în plus, ilustrează bine şi genul de probleme pe care l-am descris sus; iată de ce am decis să amânăm publicarea soluţiilor exerciţiilor din [**4**] (mai ales că, nu-i aşa?, "cititorii noştri sunt la fel de inteligenţi ca şi noi", ba chiar mai) în favoarea problemei pe care o prezentăm chiar acum.

Problema 1. *Care este cea mai bună inegalitate de tipul*

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \geq$$
$$\geq k(a+b+c)(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc), \quad \forall a, b, c > 0\ ?$$

Cu alte cuvinte, deoarece şi aici a doua paranteză din membrul drept are valori nenegative şi a, b, c sunt strict pozitive, trebuie să determinăm cea mai mare valoare pe care o poate lua k astfel încât inegalitatea de mai sus să fie adevărată pentru orice $a, b, c > 0$. Şi de această dată începem cu particularizarea $b = c = 1$ care ne conduce la $(a^2+2)(a-1)^2 \geq 2k(a+2)(a-1)^2$, deci, până la urmă $a^2 + 2 \geq 2k(a+2)$, care ar trebui să fie adevărată pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$, adică (pe baza continuităţii) pentru orice $a > 0$. Facem iar pe a să tindă la 0 pentru a găsi $2k \leq 1$ dar, surpriză! Pentru $k = 1/2$ şi $b = c = 1$ inegalitatea devine $a(a-1)^3 \geq 0$ şi, prin urmare, este departe de a fi adevărată pentru orice $a, b, c > 0$. Trebuie deci să rafinăm evaluarea lui k, observând că, de fapt, am obţinut

$$2k \leq \frac{a^2+2}{a+2}, \quad \forall a > 0;$$

ceea ce înseamnă că, în mod necesar, $2k$ este cel mult egal cu valoarea minimă a funcţiei $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$ pe intervalul $(0, \infty)$. (De aici şi deosebirea faţă de cazul studiat anterior: minimul nu se atinge în capătul intervalului.) Aceasta se dovedeşte a fi ceva mai mică decât limita funcţiei în origine, adică decât 1; valoarea minimă a funcţiei f este $2\sqrt{6} - 4$ (se realizează pentru $x = \sqrt{6} - 2$), astfel că ar trebui să avem $k \leq \sqrt{6} - 2$ (fără să fie deloc clar deocamdată dacă aceasta este, într-adevăr, valoarea care produce cea mai bună inegalitate). Oricum, putem considera mai departe $k \in [0, \sqrt{6} - 2]$ (în mod clar valorile negative ale lui k nu pot fi luate în discuţie drept candidate pentru "cel mai bun" k); în particular, avem $k \leq \sqrt{6} - 2 < 1/2 \Rightarrow$

$1-2k>0$. Mai departe încercăm, cu metoda normării, să vedem ce se întâmplă cu inegalitatea noastră pentru asemenea k şi a,b,c numere pozitive oarecare. Datorită simetriei putem presupune $c=\min\{a,b,c\}$; notăm atunci

$$\frac{a}{c}=1+x,\quad \frac{b}{c}=1+y,$$

unde x şi y trebuie să fie nenegative. Inegalitatea mai poate fi scrisă în forma

$$\sum a^4+(2-2k)\sum a^2b^2+(4k-1)\sum a^2bc\geq (k+1)\sum(a^3b+ab^3)$$

(toate sumele sunt ciclice) sau înlocuind $\frac{a}{c}$ cu $1+x$ şi $\frac{b}{c}$ cu $1+y$,

$$\begin{aligned}(1+x)^4+(1+y)^4+1+(2-2k)\left[(1+x)^2(1+y)^2+(1+x)^2+(1+y)^2\right]+\\ +(4k-1)\left[(1+x)^2(1+y)+(1+x)(1+y)^2+(1+x)(1+y)\right]\geq\\ \geq (k+1)\left[(1+x)^3(1+y)+(1+x)(1+y)^3+(1+x)^3+(1+y)^3+1+x+1+y\right].\end{aligned}$$

Acum urmează partea neplăcută (dar inevitabilă când folosim metoda normării!) în care trebuie să facem calculele; pe care nu le vom reproduce aici (dar vă sfătuim să le verificaţi!...). Inegalitatea de demonstrat capătă forma

$$\begin{aligned}x^4-(k+1)x^3y+(2-2k)x^2y^2-(k+1)xy^3+y^4+\\ +(2-2k)x^3-3x^2y-3xy^2+(2-2k)y^3+(3-6k)(x^2-xy+y^2)\geq 0,\end{aligned}$$

sau încă

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x-y)^4+\frac{1}{2}(x^2-y^2)^2+(1-k)xy(x-y)^2+2(1-2k)x^2y^2+\\ +2(1-k)(x+y)(x-y)^2+(2-5k)xy(x+y)+3(1-2k)(x-y)^2+3(1-2k)xy\geq 0.\end{aligned}$$

Acum putem demonstra inegalitatea pentru $k\leq\sqrt{6}-2$; oricum, ea este evidentă pentru $k<0$, deci putem considera $k\geq 0$.

Să observăm mai întâi că, pentru aceste valori ale lui k, avem

$$2(1-2k)t^2-2(2-5k)t+3(1-2k)\geq 0,$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$, deoarece discriminantul trinomului este

$$4(2-5k)^2-24(1-2k)^2=4(k^2+4k-2)=4(k+\sqrt{6}+2)(k-\sqrt{6}+2)\leq 0;$$

în plus, cum am mai arătat, k este mai mic decât $1/2$, deci $2(1-2k)>0$.

În membrul stâng al inegalităţii de demonstrat toţi termenii sunt în mod evident nenegativi, cu excepţia lui $(2-5k)xy(x+y)$ care poate fi luat în grupul

$$\begin{aligned}2(1-2k)x^2y^2+(2-5k)xy(x+y)+3(1-2k)xy=\\ =xy\left[2(1-2k)xy+(2-5k)(x+y)+3(1-2k)\right],\end{aligned}$$

pe care-l mai putem scrie

$$xy\left(2(1-2k)\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+2(2-5k)\frac{x+y}{2}+3(1-2k)\right)-\frac{1-2k}{2}xy(x-y)^2.$$

Dar paranteza mare este nenegativă, conform observaţiei referitoare la trinomul de gradul al doilea, iar ultimul termen este "anihilat" de $(1-k)xy(x-y)^2$:

$$(1-k)xy(x-y)^2-\frac{1-2k}{2}xy(x-y)^2=\frac{1}{2}xy(x-y)^2\geq 0$$

şi inegalitatea este demonstrată; valoarea cea mai bună (maximă) a lui k este, într-adevăr, $\sqrt{6}-2$.

3. Poate că nu e lipsit de interes să vedem cum am ajuns la această inegalitate: desigur, din întâmplare (multe ies astfel ...)! Am vrut să vedem ce se obţine dacă aplicăm *inegalitatea lui Jensen* funcţiei radical în felul următor:

$$\frac{a}{a+b+c}\sqrt{(b+c)^2}+\frac{b}{a+b+c}\sqrt{(a+c)^2}+\frac{c}{a+b+c}\sqrt{(a+b)^2}\leq$$
$$\leq\sqrt{\frac{a}{a+b+c}(b+c)^2+\frac{b}{a+b+c}(a+c)^2+\frac{c}{a+b+c}(a+b)^2}.$$

(Asta mai rezultă şi folosind *inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz*). După ridicare la pătrat şi încă câteva calcule ajungem la

$$\frac{4(ab+ac+bc)^2}{a+b+c}\leq\frac{4}{9}(a+b+c)^3+\frac{30abc-4\sum a^3-3\sum a(b^2+c^2)}{9}$$

sau, totuna,

$$4(a^2+b^2+c^2+5ab+5ac+5bc)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$
$$=4\big[(a+b+c)^4-9(ab+ac+bc)^2\big]\geq(a+b+c)\Big(4\sum a^3+3\sum a(b^2+c^2)-30abc\Big).$$

Mai ţinem cont acum de două lucruri: prima paranteză din membrul stâng nu depăşeşte $6(a^2+b^2+c^2)$, şi a doua este nenegativă conform inegalităţii

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc,$$

pe când cea de-a doua paranteză din membrul drept se poate minora (pe baza *inegalităţii lui Schur*) cu

$$4\sum a(b^2+c^2)-12abc+3\sum a(b^2+c^2)-30abc=7\left(\sum a(b^2+c^2)-6abc\right);$$

astfel suntem conduşi la inegalitatea

$$24(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\geq$$
$$\geq 7(a+b+c)(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc),\quad \forall a,b,c>0$$

şi întrebarea din problema 1 vine în mod natural (după ce am demonstrat inegalitatea pentru $k=\frac{7}{24}$). Putem vedea acum că valoarea lui k de la care am pornit este destul de departe de cel mai bun k; avem, totuşi, o demonstraţie fără prea multe calcule a unei inegalităţi de acest tip, care ne poate da speranţe că s-ar putea face aşa şi "cea mai bună dintre aceste inegalităţi". De asemenea, vă propunem spre rezolvare

Problema 2. *Găsiţi cea mai bună inegalitate de forma*

$$(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2+(27k-64)x^2y^2z^2\geq kxyz(x+y+z)^3,\quad x,y,z>0.$$

Bibliografie

1. **L. Panaitopol** - *O inegalitate geometrică*, Gazeta Matematică seria B, 4/1982.
2. **L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu** - *Inegalităţi*, Editura GIL, Zalău, 1996.
3. **V. Vâjâitu** - *Asupra unei inegalităţi*, Gazeta Matematică seria B, 7/1984.
4. **M. Tetiva** - *Metoda normării*, RecMat - 1/2006, 30-34.