CHESTIUNI METODICE

Cum se face o problemă?

Valeriu BRAŞOVEANU, Gabi GHIDOVEANU, Marian TETIVA[1]

Este vorba de

Problema 1. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale cu următoarele proprietăţi:*
i) şirul $(na_n)_{n\geq 1}$ *este convergent şi are limita* a*;*
ii) şirul $(n^2(a_{n+1}-a_n))_{n\geq 1}$ *este convergent şi are limita* b*.*
Atunci $b=-a$*.*

Iată în continuare trei metode de a rezolva problema, destul de diferite între ele.

Metoda întâi se bazează pe bine cunoscuta proprietate, conform căreia, dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita x (nu neapărat finită), atunci şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

există şi este egală cu x. În cazul problemei noastre va rezulta din ipoteză că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2(a_2-a_1)+2^2(a_3-a_2)+\cdots+n^2(a_{n+1}-a_n)}{n}=b;$$

de asemenea, avem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}na_n\cdot\dfrac{1}{n}=a\cdot 0=0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$.

Acum totul rezultă din identitatea (uşor de verificat)

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(a_{k+1}-a_k)}{n}=na_{n+1}-2\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n},$$

prin trecere la limită pentru $n\to\infty$. Se obţine egalitatea care trebuia demonstrată: $b=a-2a+0\Leftrightarrow b=-a$.

Metoda a doua. Considerăm întâi cazul $a\neq 0$; atunci, pentru n suficient de mare, să spunem pentru $n\geq n_0$, avem şi $na_n\neq 0\Leftrightarrow a_n\neq 0$ şi putem considera şirul $(b_n)_{n\geq n_0}$ definit prin

$$b_n=\frac{a}{a_n}\Leftrightarrow a_n=\frac{a}{b_n},\quad \forall n\geq n_0.$$

Desigur, vom avea $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=1$ (condiţia *i)*) şi $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{a}{b_{n+1}}-\dfrac{a}{b_n}\right)=b$ (conform celei de-a doua condiţii din ipoteză). Atunci putem scrie

$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=-\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\right)\cdot\frac{b_n}{n}\cdot\frac{b_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=-\frac{b}{a}.$$

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Dar, conform teoremei *Cesàro - Stolz*, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{n+1-n}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}$ şi cele două limite sunt egale. Noi obţinem deci $1=-\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow b=-a$, ceea ce am şi vrut să demonstrăm.

Totuşi, această a doua demonstraţie nu s-a încheiat: mai avem de studiat cazul $a=0$. Cu alte cuvinte, mai trebuie să arătăm că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$ şi există $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=b\in\mathbb{R}$, atunci şi această limită este zero. Pentru asta, fie $a'_n=a_n+\dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Se verifică că $\lim\limits_{n\to\infty} na'_n=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a'_{n+1}-a'_n)=b-1$; prin urmare, şirul $(a'_n)_{n\geq 1}$ îndeplineşte şi el condiţiile problemei, limita de la *i*) fiind nenulă. Atunci, conform celor arătate anterior pentru cazul $a\neq 0$, rezultă $b-1=-1\Leftrightarrow b=0$ şi demonstraţia este completă.

Metoda a treia este probabil, cea mai frumoasă; în plus, ea ne readuce în punctul de pornire, adică acolo de unde am plecat noi pentru a compune această problemă.

Să notăm $c_n=na_n$; aşadar, $(c_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent cu limita a şi din egalitatea

$$n^2(a_{n+1}-a_n)=n(c_{n+1}-c_n)-c_{n+1}+a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$$

rezultă că şirul $(n(c_{n+1}-c_n))_{n\geq 1}$ este şi el convergent, având limita $a+b$ (nu mai repetăm demonstraţia faptului că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent cu limita 0). Concluzia ar rezulta acum imediat dacă ar fi rezolvată

Problema 2. *Fie $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale convergent astfel încât şirul $(n(c_{n+1}-c_n))_{n\geq 1}$ este, de asemenea, convergent. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} n(c_{n+1}-c_n)=0$.

Soluţie. Presupunem $c=\lim\limits_{n\to\infty} n(c_{n+1}-c_n)\neq 0$; deoarece înlocuirea lui $(c_n)_{n\geq 1}$ cu $(-c_n)_{n\geq 1}$ nu schimbă fundamental problema, ci doar semnul lui c, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $c>0$. Relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} n(c_{n+1}-c_n)=c$ implică, în particular, faptul că există un număr natural N astfel încât

$$n(c_{n+1}-c_n)>\frac{c}{2}\Leftrightarrow c_{n+1}-c_n>\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{n},\quad \forall n\geq N;$$

dacă adunăm toate aceste inegalităţi pentru $n=N,N+1,\ldots,N+m-1$, obţinem

$$c_{N+m}-c_N>\frac{c}{2}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+m-1}\right),$$

pentru orice $m\geq 1$ număr natural. Dar asta nu se poate întâmpla, deoarece limita membrului stâng este (pentru $m\to\infty$) finită, iar limita membrului drept este ∞ (avem acolo o parte din seria armonică).

După cum se poate vedea, nu am spus nimic până acum despre cum "am făcut" Problema 1 - în sensul de cum am inventat-o, cum am ajuns la acest enunţ (deşi am spus multe despre cum "se face", i. e. cum se rezolvă); se pare că a sosit timpul. Ei bine, am plecat de la

Problema 0. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât există şi sunt finite limitele*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad \text{şi}\quad \lim_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n).$$

Atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent şi* $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)=0$.

Problema a fost propusă de **Laurenţiu Panaitopol** cu ceva ani în urmă (în 1977) la o etapă judeţeană a Olimpiadei Naţionale de Matematică (a se vedea, de exemplu, [**1**]). Enunţul este modificat, dar nu esenţial, iar soluţia, dată tot în [**1**], se bazează pe identitatea

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(a_{k+1}-a_k)}{n} = a_{n+1} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

şi de aici ne-a venit ideea de a vedea ce se întâmplă dacă vom considera $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(a_{k+1}-a_k)$. Am obţinut astfel identitatea

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(a_{k+1}-a_k)}{n} = na_{n+1} - 2\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n},$$

şi n-a mai fost mult până la formularea Problemei 1.

Acum se vede de ce am spus că metoda a treia ne-a întors în punctul de pornire; totuşi, enunţurile Problemelor 0 şi 2 diferă. Putem oare aplica metoda de la 2 la 0?!

Nu trebuie să ne surprindă că răspunsul este afirmativ. Procedăm ca acolo (dar cu ipotezele Problemei 0 şi cu notaţia $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru şir) iar din inegalitatea

$$a_{N+m} - a_N > \frac{c}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+m-1}\right),$$

vom deduce, evident, că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dar asta implică şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \infty,$$

în contradicţie cu ipoteza. De fapt această a treia soluţie ne-a plăcut în mod deosebit deoarece ea spune mai mult decât celelalte. De exemplu, ea rezolvă şi

Problema 3. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale pentru care există limita şirului* $(n(a_{n+1}-a_n))_{n\geq 1}$, *care este finită.*

Atunci, ori $(a_n)_{n\geq 1}$ *are limită infinită, ori* $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)=0$.

Mai mult, rezolvă la fel

Problema 4. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale pentru care notăm cu* $l = \liminf\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)$ *şi* $L = \limsup\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)$, *care sunt finite.*

Atunci fie $(a_n)_{n\geq 1}$ *are limită infinită, fie* $0 \in [l, L]$.

Evident, abia acest ultim enunţ este forma generală şi profundă a problemei de la care am pornit: toate celelalte sunt cazuri particulare ale sale (gândiţi-vă *acum* la Problema 1!) şi a meritat să facem efortul de a găsi mai multe modalităţi de rezolvare pentru prima problemă pentru a depista esenţa ei; şi sfătuim pe orice iubitor de matematici să procedeze la fel atunci când se află în faţa unei probleme - mai mult sau mai puţin - noi. De fapt, ca să ajungem aici am scris această notă.

Bibliografie

1. **I. Tomescu** (coordonator): *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1992.