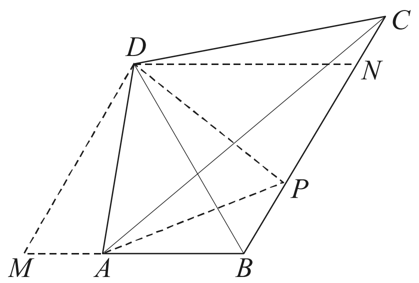
Asupra unei probleme de concurs

Dumitru MIHALACHE, Marian TETIVA[1]

În această notă ne propunem să prezentăm două modalităţi de abordare a unei probleme de geometrie şi să obţinem o "generalizare" a sa (rostul ghilimelelor se va vedea la vremea potrivită). Problema a fost propusă de **C. Apostol** la *Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Duican"* (ajuns, iată, la cea de a XI-a ediţie: felicitări şi succes în continuare!) şi enunţul ei poate fi citit în [**1**]; iată acest enunţ (modificat pentru a reţine doar esenţialul):

Problema 1. *În patrulaterul convex $ABCD$ avem $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 120°$, $m(\widehat{C}) = 50°$, $m(\widehat{D}) = 110°$. Să se arate că, dacă $(BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.*

Într-o primă fază, negăsind nici o altă idee, am încercat o rezolvare a problemei bazată pe calcule trigonometrice. Rezultatul acestei căutări este



Metoda I de rezolvare a problemei. Din ipoteză rezultă că $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBC}) = 60°$ şi, apoi, că $m(\widehat{ADB}) = 40°$, iar $m(\widehat{BDC}) = 70°$. Să considerăm punctele $M \in AB$ ($A \in (MB)$) şi $N \in (BC)$ astfel încât triunghiurile MBD şi BND să fie echilaterale (prin urmare $m(\widehat{MDA}) = 20°$ şi $m(\widehat{NDC}) = 10°$). Fie a lungimea laturilor acestor triunghiuri. Cu teorema sinusurilor în triunghiul MAD obţinem

$$\frac{MA}{\sin 20°} = \frac{a}{\sin 100°} \quad \Rightarrow \quad MA = \frac{a \sin 20°}{\sin 100°} = \frac{a \sin 20°}{\sin 80°},$$

iar din triunghiul NCD,

$$\frac{NC}{\sin 10°} = \frac{a}{\sin 50°} \quad \Rightarrow \quad NC = \frac{a \sin 10°}{\sin 50°}.$$

Atunci

$$AB = MB - MA = a\,\frac{\sin 80° - \sin 20°}{\sin 80°} = a\,\frac{2 \sin 30° \cos 50°}{\sin 80°} = a\,\frac{\cos 50°}{\sin 80°}$$

şi

$$BC = BN + NC = a\,\frac{\sin 50° + \sin 10°}{\sin 50°} = a\,\frac{\cos 20°}{\sin 50°},$$

prin urmare

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\cos 20° \sin 80°}{\sin 50° \cos 50°} = \frac{2 \cos 20° \sin 80°}{\sin 100°} = 2 \cos 20° = \frac{\sin 40°}{\sin 20°}$$

(este evident că am "aranjat" acest raport, ştiind unde vrem să ajungem).

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Acum, fie $x = m(\widehat{BAC})$, deci $m(\widehat{BCA}) = 60^\circ - x$; tot cu teorema sinusurilor (acum în triunghiul ABC) şi ţinând seama de calculul anterior, avem

$$\frac{\sin x}{\sin(60^\circ - x)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} \quad \Rightarrow \quad \sin x \sin 20^\circ = \sin(60^\circ - x)\sin 40^\circ;$$

transformăm produsele în sume şi avem

$$\cos(x - 20^\circ) - \cos(x + 20^\circ) = \cos(20^\circ - x) - \cos(100^\circ - x),$$

deci

$$\cos(100^\circ - x) - \cos(x + 20^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 60^\circ \sin(40^\circ - x) = 0.$$

Cum, evident, $0^\circ < x < 80^\circ$, de aici rezultă $x = 40^\circ$ şi problema este rezolvată.

Desigur, asemenea calcule nu sunt pentru cl. VII-a (iar problema a fost propusă elevilor acestei clase); să vedem aşadar şi o soluţie a problemei la acest nivel.

Metoda a II-a se bazează pe observaţia următoare: dacă $P \in (BC)$ este punctul pentru care $m(\widehat{PDC}) = 50^\circ$, atunci triunghiul PDC este isoscel cu $PD = PC$ (evident), iar triunghiul ADP este echilateral. Într-adevăr, unghiul $\widehat{BPD}$, se vede imediat, are măsura de 100°, de aceea patrulaterul $ABPD$ este inscriptibil (având două unghiuri opuse suplementare). Atunci $m(\widehat{APD}) = m(\widehat{DBA}) = 60^\circ$, iar, pe de altă parte, $m(\widehat{ADP}) = m(\widehat{ADC}) - m(\widehat{PDC}) = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$, deci triunghiul ADP are două unghiuri de măsură 60°.

Rezultă că avem $AP = DP = PC$ şi triunghiul PAC este tot isoscel; prin urmare

$$m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{PCA}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{APC})}{2} = 20^\circ,$$

de unde rezultă imediat $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ şi demonstraţia se încheie.

Fără îndoială, această a doua variantă de soluţionare a problemei este mult mai simplă decât prima; totuşi, ideea de a alege punctul P nu vine prea uşor. În schimb, rolul său în problemă este fundamental; de fapt, noi credem că problema a fost construită pornind de la cele două triunghiuri isoscele ”lipite”, ADP şi CDP. Că triunghiul ADP este chiar echilateral nu este esenţial şi de asta vă puteţi convinge rezolvând următoarea ”generalizare” a primei probleme.

Problema 1′. *Fie $ABCD$ un patrulater în care $m(\widehat{A}) = \beta + \gamma$, $m(\widehat{B}) = 2\alpha + \gamma$, $m(\widehat{C}) = \alpha$, $m(\widehat{D}) = \alpha + \beta$, $m(\widehat{DBC}) = \beta$, unde $\alpha, \beta, \gamma > 0^\circ$ şi $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Atunci:*

a) $90^\circ > \beta > \gamma$.

b) *$(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.*

Soluţie. *a)* Deoarece $m(\widehat{B}) > m(\widehat{DBC})$, avem $2\alpha+\gamma > \beta$ şi $2\beta < 2\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ $\Rightarrow \beta < 90^\circ$. Apoi, $m(\widehat{ABD}) = 2\alpha+\gamma-\beta$ şi $m(\widehat{ADB}) = 180^\circ-(2\alpha + \gamma - \beta + \beta + \gamma) =$ $= \beta - \gamma$, deci $\beta > \gamma$.

b) Alegem un punct $P \in (BC)$ astfel încât

$$m(\widehat{PDC}) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad m(\widehat{PDB}) = \gamma.$$

Acest punct există pe segmentul (BC), deoarece $m(\widehat{BDC}) = \alpha + \gamma$. Mai departe demonstraţia decurge ca mai sus: observaţi că triunghiul PCD este isoscel, apoi că

$ABPD$ este patrulater inscriptibil şi că triunghiul PAD este isoscel (cu $m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PDA}) = \beta$). Rezultă triunghiul PAC isoscel, de unde se va putea calcula măsura lui $\widehat{PAC}$ şi apoi se ajunge la $m(\widehat{BAC}) = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$, ceea ce încheie rezolvarea.

Nu e o generalizare efectivă, totul se bazează pe aceeaşi idee (Problema 1 se regăseşte pentru $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ şi $\gamma = 20°$): iată de ce am pus cuvântul între ghilimele.

Iar pentru a încheia lăsăm ca "temă" o problemă înrudită cu cele de mai sus (eventual încercaţi şi o generalizare a ei).

Problema 2. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{B}) = 110°$ şi $m(\widehat{C}) = 50°$. Considerăm punctele $M \in (AC)$ şi $N \in (AB)$ astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 70°$ şi $m(\widehat{NCB}) = 30°$. Să se calculeze $m(\widehat{AMN})$.* (Răspuns: 60°.)

Bibliografie

1. **F. Diac** - *A XI-a ediţie a Concursului Naţional de Matematică "Laurenţiu Duican"*, Braşov, 2003, G. M. 11/2003.

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S. S. M.

continuare din nr. 1/2000, 1/2001, 1/2002, 1/2003 şi 1/2004

126. DIMITRIU Gabriel	I. M. F., Iaşi
127. RĂDUCANU Petru	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
128. IUREA Gheorghe	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
129. LAZĂR Cristian	Colegiul Naţional, Iaşi
130. PETCU Alina Emilia	Liceul Energetic, Iaşi
131. POPA Gabriel	Colegiul Naţional, Iaşi
132. VĂTĂMĂNUŢĂ Laura	Şcoala Waldorf, Iaşi
133. NEDELCU Andrei	Liceul "Gr. Moisil", Iaşi
134. CĂRĂUŞU Alexandru	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi
135. ROMAN Neculai	Şcoala "V. Alecsandri", Mirceşti (Iaşi)
136. CĂLIN Ionela	Liceul "D. Mangeron", Iaşi
137. GOLĂEŞ Angelica	Gr. şc. ind. uşoară "Victoria", Iaşi
138. BEJAN Tinuţa	Şcoala "Al. Vlahuţă", Iaşi
139. BUZAC Gabriela - Tamara	Liceul Economic nr. 1, Iaşi
140. PĂDURARU Adriana	Şcoala "B. P. Hasdeu", Iaşi
141. LUCHIAN Dorel	Liceul "M. Costin", Iaşi
142. COZLAC Magda	Liceul ind. nr. 7, Iaşi
143. LUCA TUDORACHE Rodica	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi
144. POPA Antoaneta	Şcoala Mânzăteşti (Iaşi)
145. ARBONE Dorina	Şcoala "Mircea cel Bătrân", Iaşi
146. IONESCU Mihaela	Şcoala "I. Ghica", Iaşi
147. SAVA Radu	Colegiul "C. Negruzzi", Iaşi

(continuare la p. 128)