O problemă ... şi opt soluţii

Adrian ZANOSCHI[1]

La prima ediţie a **Concursului de matematică "Alexandru Myller"**, care a avut loc la Iaşi, în perioada 4 - 6 aprilie 2003, a fost propusă elevilor de clasa a X-a următoarea problemă [**1**]:

Fie ABC şi ADE două triunghiuri dreptunghice cu $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ şi $AB = AD$. Fie F proiecţia lui B pe AC şi G proiecţia lui D pe AE. Să se arate că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare.

Problema, rezolvată corect de aproximativ 60% dintre concurenţi, a prilejuit acestora etalarea unor variate tehnici şi metode de geometrie sintetică, analitică şi vectorială. Vă prezentăm în continuare opt dintre rezolvările care au fost date în concurs şi în afara lui, lăsându-vă pe dumneavoastră să decideţi care este cea mai frumoasă.

Soluţia I (sintetică). Aplicând teorema catetei în triunghiurile ABC şi ADE, obţinem:

$$AF \cdot AC = AB^2 = AD^2 = AG \cdot AE,$$

de unde rezultă că $AF \cdot AC = AG \cdot AE$, adică punctele F, C, E şi G sunt conciclice. De aici, deducem că $\widehat{CFE} = 90^\circ$ dacă şi numai dacă $\widehat{EGC} = 90^\circ$, ceea ce înseamnă că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare. (**Andrei Ştefănescu**, elev, *Colegiul Naţional de informatică "Tudor Vianu", Bucureşti*)

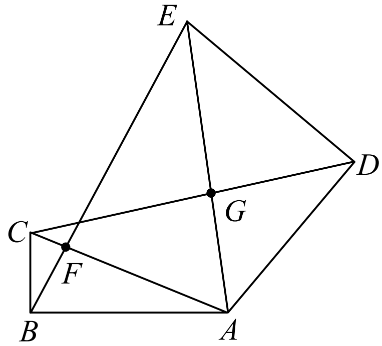

Fig. 1

Soluţia a II-a (sintetică). Vom demonstra mai întâi următoarea

Lemă. *Fie un triunghi ABC şi un punct $M \in (BC)$. În aceste condiţii, AM este perpendiculară pe BC dacă şi numai dacă:*

$$AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2. \tag{1}$$

Demonstraţie. I Dacă $AM \perp BC$, atunci din egalităţile $AB^2 - BM^2 = AM^2$ şi $AC^2 - CM^2 = AM^2$, rezultă relaţia căutată.

II Să presupunem că are loc relaţia (1). Notând cu α unghiul $\widehat{AMB}$, avem

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2\,AM \cdot BM \cos\alpha,$$
$$AC^2 = AM^2 + CM^2 + 2\,AM \cdot CM \cos\alpha,$$

de unde, folosind egalitatea (1), deducem $-AM \cdot BM \cos\alpha = AM \cdot CM \cos\alpha$ sau $AM \cdot BC \cos\alpha = 0$, deci $\alpha = 90^\circ$.

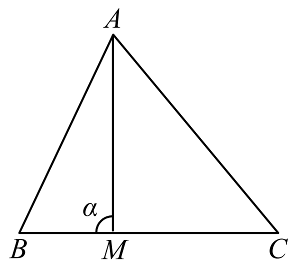

Fig. 2

[1] Profesor, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Revenind la problema noastră, să presupunem că B, F, E sunt coliniare. Aplicând Lema în triunghiurile ABC, ADE şi ACE, obţinem

$$AB^2 - AF^2 = CB^2 - CF^2, \tag{2}$$
$$AD^2 - AG^2 = DE^2 - EG^2, \tag{3}$$
$$CE^2 - CF^2 = EA^2 - FA^2. \tag{4}$$

Cum $AB = AD$, din (2) şi (3) rezultă că:

$$CB^2 - CF^2 + AF^2 = DE^2 - EG^2 + AG^2,$$

de unde, având în vedere relaţia (4), găsim:

$$CB^2 + EA^2 - CE^2 = DE^2 - EG^2 + AG^2,$$

sau

$$CB^2 + \left(EA^2 - DE^2\right) - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$
$$\left(CB^2 + AD^2\right) - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$
$$CA^2 - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$

ceea ce înseamnă, conform Lemei, că $CG \perp AE$. Prin urmare, punctele D, G, C sunt coliniare. Reciproca se demonstrează în mod analog. (**Adrian Zanoschi**)

Soluţia a III-a (sintetică). Presupunem că punctele B, F, E sunt coliniare. Fie G' proiecţia punctului C pe AE. Din faptul că $\triangle AG'C \sim \triangle AFE$ rezultă că $\dfrac{AG'}{AF} = \dfrac{AC}{AE}$ sau $AG' = \dfrac{AC \cdot AF}{AE} = \dfrac{AB^2}{AE}$ (teorema catetei în $\triangle ABC$). Ca urmare, $AG' = \dfrac{AD^2}{AE} = AG$ (teorema catetei în $\triangle ADE$), adică G' coincide cu G şi, deci, punctele D, G, C sunt coliniare. Implicaţia inversă se demonstrează la fel. (**Petru Asaftei**, prof., *Şcoala Normală "V. Lupu", Iaşi*)

Soluţia a IV-a (sintetică). Vom utiliza rezultatul următor: *Un patrulater $MNPQ$ (convex sau concav) este ortodiagonal dacă şi numai dacă este îndeplinită relaţia $MN^2 + PQ^2 = MQ^2 + NP^2$.*

Dacă punctele B, F, E sunt coliniare, atunci patrulaterul $ABCE$ este ortodiagonal şi are loc relaţia $AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$. Deoarece $AB = AD$, $AE^2 = AD^2 + ED^2$, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = AC^2 - AD^2$, relaţia se scrie $AD^2 + CE^2 = AC^2 + ED^2$, adică patrulaterul $ADEC$ este ortodiagonal. Deci D, G, C sunt coliniare. Menţionăm faptul că în condiţiile $E \in BF$ şi $E \notin [BF]$ patrulaterul $ABCE$ este concav şi că $E \in [BF]$ nu poate avea loc. Se arată la fel implicaţia inversă. (**Temistocle Bîrsan**)

Soluţia a V-a (vectorială). Să presupunem că punctele B, F şi E sunt coliniare. În acest caz, avem $BE \perp AC$, deci $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Să arătăm că $CG \perp AE$:

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) =$$
$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} =$$
$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} =$$

$$= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) =$$
$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -AB^2 + AG \cdot AE = -AD^2 + AG \cdot AE = 0.$$

De aici, având în vedere că $DG \perp AE$, rezultă că punctele D, G şi C sunt coliniare. Cealaltă implicaţie se demonstrează în mod analog. (**Cristina Gutue**, elevă, *Colegiul Naţional "I. C. Brătianu", Piteşti* şi **Bianca Milatinovici**, elevă, *Liceul de Informatică "Gr. C. Moisil", Iaşi*)

Soluţia a VI-a (vectorială). Fie xOy un sistem ortogonal de coordonate astfel încât Ox să fie mediatoarea lui BD. Vom nota cu $\overrightarrow{r}_M$ vectorul de poziţie al unui punct oarecare M (faţă de polul O). Punctele B, F şi E sunt coliniare dacă şi numai dacă $BE \perp AC$, adică $(\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_B) \cdot (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_A) = 0$ sau

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B\ . \tag{1}$$

Punctele D, G şi C sunt coliniare dacă şi numai dacă $(\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_D) \cdot (\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_A) = 0$, sau

$$\overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D\ . \tag{2}$$

Deoarece $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, rezultă că $(\overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A) \cdot (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_B) = 0$ şi $(\overrightarrow{r}_D - \overrightarrow{r}_A) \cdot$ $\cdot (\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_D) = 0$, deci

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B^2 \tag{3}$$

şi

$$\overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_D^2\ . \tag{4}$$

Datorită modului de alegere a sistemului de coordonate avem $\overrightarrow{r}_B^2 = \overrightarrow{r}_D^2$ şi $\overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D$ şi astfel, din (3) şi (4), obţinem

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A\ . \tag{5}$$

Prin urmare, având în vedere relaţia (5) şi egalitatea $\overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D$, rezultă că relaţiile (1) şi (2) sunt echivalente, adică ceea ce trebuia demonstrat. (**Adrian Zanoschi**)

Soluţia a VII-a (cu numere complexe). Deoarece relaţiile $F \in BE$ şi $G \in DC$ sunt echivalente cu $BE \perp AC$ şi respectiv cu $DC \perp AE$, problema noastră revine la a arăta echivalenţa $BE \perp AC \Leftrightarrow DC \perp AE$.

Considerăm un reper ortogonal în plan cu originea în A şi notăm cu b, c, d şi e afixele punctelor B, C, D şi E. Cum $AB = AD$, rezultă că $|b| = |d|$. Dacă notăm cu $x \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{C})$ produsul real al numerelor complexe x şi y, avem:

$$BE \perp AC \Leftrightarrow (e-b) \cdot c = 0 \Leftrightarrow (e-b)\,\overline{c} + \left(\overline{e} - \overline{b}\right) c = 0 \Leftrightarrow b\overline{c} + \overline{b}c = \overline{c}e + c\overline{e}, \tag{1}$$

$$DC \perp AE \Leftrightarrow (c-d) \cdot e = 0 \Leftrightarrow (d-c)\,\overline{e} + \left(\overline{d} - \overline{c}\right) e = 0 \Leftrightarrow d\overline{e} + \overline{d}e = \overline{c}e + c\overline{e}, \tag{2}$$

$$BC \perp AB \Leftrightarrow (c-b) \cdot b = 0 \Leftrightarrow (c-b)\,\overline{b} + \left(\overline{c} - \overline{b}\right) b = 0 \Leftrightarrow b\overline{c} + \overline{b}c = 2b\overline{b}, \tag{3}$$

$$DE \perp AD \Leftrightarrow (e-d) \cdot d = 0 \Leftrightarrow (e-d)\,\overline{d} + \left(\overline{e} - \overline{d}\right) d = 0 \Leftrightarrow d\overline{e} + \overline{d}e = 2d\overline{d}. \tag{4}$$

Cum $b\overline{b} = |b|^2 = |d|^2 = d\overline{d}$, din relaţiile (3) şi (4) rezultă că $b\overline{c} + \overline{b}c = d\overline{e} + \overline{d}e$, de unde deducem că relaţiile (1) şi (2) sunt echivalente, deci $BE \perp AC$, dacă şi numai dacă $DC \perp AE$. (**Cezar Chirilă**, elev, *Colegiul Naţional "M. Eminescu", Botoşani*)

Soluţia a VIII-a (analitică). Fie xOy un sistem ortogonal de coordonate cu originea în A şi $(Ox = (AC$. În acest caz, punctele din problemă vor avea coordonatele: $A(0,0)$, $B(b,b')$, $C(c,0)$, $D(d,d')$, $E(e,e')$, $F(b,0)$, $G(g,g')$. Să presupunem că B, F, E sunt coliniare şi să arătăm că D, G, C sunt coliniare (reciproca se poate demonstra în mod analog, alegând sistemul de coordonate astfel încât triunghiul ADE să joace rolul triunghiului ABC). În acest caz $e = b$.

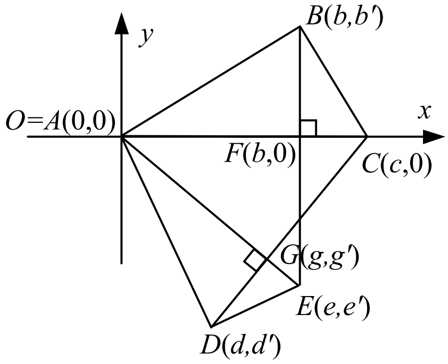

Fig. 3

Din $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, rezultă că

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = m_{AD} \cdot m_{DE} = -1$$

sau

$$\frac{b'}{b} \cdot \frac{b'}{b-c} = \frac{d'}{d} \cdot \frac{e'-d'}{e-d} = -1,$$

de unde obţinem $b^2 + (b')^2 = bc$ şi $ed + e'd' = d^2 + (d')^2$. De aici, având în vedere că $AB = AD$, deci $b^2 + (b')^2 = d^2 + (d')^2$, deducem că:

$$ed + e'd' = bc. \tag{1}$$

Cum $DG \perp AE$, rezultă că $m_{DG} \cdot m_{AE} = -1$, sau

$$\frac{g'-d'}{g-d} = -\frac{e}{e'}. \tag{2}$$

În sfârşit, ţinând cont de (1) şi (2), putem scrie:

$$m_{DG} = m_{DC} \Leftrightarrow \frac{g'-d'}{g-d} = \frac{d'}{d-c} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -\frac{e}{e'} = \frac{d'}{d-c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ed + e'd' = ec \overset{(1)}{\Leftrightarrow} bc = ec \Leftrightarrow b = e,$$

care este adevărată, conform ipotezei. (**Evelina Slătineanu**, elevă, *Liceul "D. Cantemir", Iaşi*)

Bibliografie

1. **Concursul de matematică "Al. Myller"**, ediţia I, 2003, *Problema X.3* (în Recreaţii matematice, suplimentul nr. 1 (2003) sau în prezentul număr, p. 33).
2. **Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff** - *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.