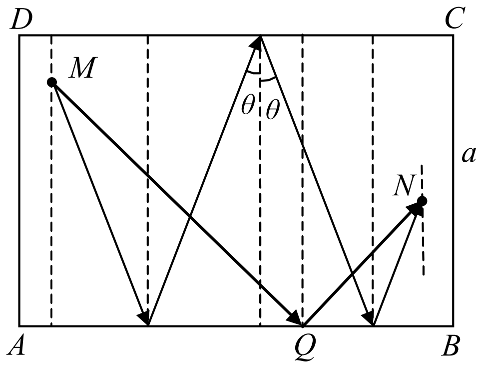
Asupra unei probleme propuse la Concursul "Florica T. Câmpan", martie 2003

Horia-Nicolai TEODORESCU[1]

La etapa judeţeană a concursului amintit, s-a dat şi următoarea problemă (reprodusă aici sumar):

"Pe un biliard dreptunghiular ABCD, o bilă porneşte din M către AB şi loveşte o altă bilă în N. Unde loveşte prima bilă latura AB? Se cunosc coordonatele punctelor M şi N". (Autor necunoscut)

Baremul afişat pe uşa şcolii unde s-a desfăşurat concursul preciza drept soluţie unică un punct de coordonate corespunzătoare datelor problemei, $(0, 2)$. Aceasta este însă numai o soluţie particulară (este drept, singura care putea fi determinată precis din datele problemei). Din figura alăturată se poate constata că există o infinitate de soluţii, obţinute prin ciocniri multiple fie şi numai după laturile AB şi respectiv CD (semi-biliardul – biliardul semi-infinit – creat de dreptele AB şi CD, fără laturile AD şi BC).



Deoarece la ciocnire traiectoria face unghiuri egale cu normala la suprafaţa de ciocnire, din egalităţile de unghiuri, obţinem, cu notaţiile $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$:

$$x_N - x_M = y_M \operatorname{tg}\theta + y_N \operatorname{tg}\theta + 2pa \operatorname{tg}\theta,$$

unde p este numărul de ciocniri cu latura CD, iar a este distanţa dintre laturile AB şi CD. Deci,

$$x_N - x_M = (y_M + y_N + 2pa) \operatorname{tg}\theta,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_N - x_M}{y_M + y_N + 2pa}, \quad \theta = \theta(p), \ p = 0, 1, \ldots$$

In textul problemei, nu se dă valoarea a, dar aceasta nu face să dispară infinitatea de soluţii posibile după relaţia de mai sus. Corespunzător fiecărei valori de unghi, se determină punctele de lovire a dreptei AB, iar pentru $p = 0$, se obţine soluţia indicată în timpul concursului. Desigur, există şi alte familii de soluţii, prin ciocniri numai

[1] Prof. dr., Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

cu pereţii AD şi BC (strict similare cu cele discutate) sau obţinute prin ciocniri cu toţi cei patru pereţi – soluţii pe care nu le analizăm aici.

O anumită ambiguitate a textului se pare că a produs încurcături unor candidaţi. Printre exprimările mai puţin fericite se numără "se îndreaptă spre AB". In ce sens ar trebui interpretată această afirmaţie? Orice traiectorie "în jos" se îndreaptă spre AB, căci se apropie de AB – distanţa dintre punctul de pe traiectorie şi AB scade. Ar fi trebuit spus "traiectoria punctului este iniţial după o dreaptă, care intersectează segmentul AB". Sau, mai simplu, "bila se ciocneşte întâi de AB". Dacă se mai făcea şi precizarea "se ciocneşte o singură dată cu AB şi nici o dată de alte margini ale biliardului, înainte de a lovi bila din N", atunci problema ar fi fost nu numai mult mai clară, dar ar fi avut ca unică soluţie chiar soluţia indicată participanţilor la concurs.

Unii candidaţi au fost înclinaţi să considere că bila ce porneşte din M se loveşte întâi de bila din N şi abia apoi de marginea AB. Interpretarea nu era greşită, căci textul problemei nu contrazice această interpretare. Din nefericire, aceasta complică problema, căci două puncte materiale se mişcă după ciocnire pe dreapta după care s-au mişcat iniţial, dar în sens opus, deci bila din M urma să se întoarcă întâi spre CD (sau AD, CD – funcţie de dimensiunile biliardului) şi apoi spre AB! Dacă bilele se presupun nepunctuale, problema este nedeterminată (este necesar să se mai precizeze unghiul de contact al bilelor la prima ciocnire); cu precizarea unghiului de ciocnire, problema devine rezolvabilă, dar depăşeşte nivelul de cunoştinţe de fizică la clasa a VIII-a.

In concluzie, problema discutată avea prea multe neclarităţi şi imprecizii pentru a fi inclusă ca atare într-un concurs de nivel judeţean, iar acordarea de note mari la această problemă probabil a lăsat pe unii elevi cu falsa impresie că au înţeles şi chiar rezolvat corect (şi complet) problema dacă au dat soluţia indicată în ziua concursului.

In final, cred că este meritoriu pentru Comisia concursului amintit că a dat atenţie unei probleme de tip biliard, dat fiind că domeniul biliardelor formale (în particular, teoria biliardelor hiperbolice) este dintre cele mai profunde şi fertile astăzi în teoria sistemelor ergodice şi a sistemelor cu dinamică neliniară [**1**], [**2**]. Biliardele poligonale şi eliptice în plan şi cele cubice şi tetraedrice sunt de altfel probleme clasice în geometrie (vezi *problema lui Alhazen*, datând din antichitate şi intens studiată în evul mediu, sau *porismul lui Poncelet*), cu multiple şi importante aplicaţii în fizică, prea puţin reflectate în literatura de specialitate pentru elevi de la noi din ţară. Să aşteptăm deci şi alte probleme despre biliarde în culegeri şi în concursuri şcolare.

Bibliografie

1. Lai-Sang Young - *Developments in Chaotic Dynamics*, Notices of AMS, 1998, vol. 45, nr. 10, pp. 1318–1328.

2. M. Hasewinkel - *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 1, pp. 406–411 (Pessin Theory), Kluwer Academic, 1997.