Asupra unor sume cu radicali

Dan POPESCU[1]

Scopul acestei note este prezentarea unor proprietăţi ale radicalilor accesibile elevului de gimnaziu şi utile în abordarea unitară a unor tipuri de probleme.

Propoziţia 1. *Dacă* $n \in \mathbb{N}$ *este astfel încât* $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, *atunci* $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Fie $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Atunci $n = \dfrac{p^2}{q^2}$, deci $q^2 \mid p^2$, de unde $q \mid p$, adică $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 2. *Fie* $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ *astfel încât* $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Atunci* $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$ *dacă şi numai dacă* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Imediat, din faptul că $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{b}\sqrt{ab}$.

Propoziţia 3. *Fie* $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$ *astfel încât* $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^*$; *atunci* $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ *şi* $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Observăm că $\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b} = \dfrac{\alpha^2 a - \beta^2 b}{\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$ şi atunci $\sqrt{a} = \dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}\right) + \left(\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}\right)\right] \in \mathbb{Q}$; analog pentru $\sqrt{b}$.

Propoziţia 4. *Fie* $a \in \mathbb{Q}^*$, *iar* $b \in \mathbb{Q}^*$ *astfel încât* $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; *atunci* $a \pm \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *şi* $a\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Dacă, prin absurd, $a + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{b} = \left(a + \sqrt{b}\right) - a \in \mathbb{Q}$, contradicţie. La fel, dacă $a\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{b} = \dfrac{1}{a}\left(a\sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$, fals.

Consecinţă. Deoarece un număr iraţional este nenul, iar inversul oricărui număr iraţional este tot număr iraţional, în condiţiile $\mathbf{P_4}$ avem şi că $\dfrac{a}{\sqrt{b}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\dfrac{1}{a \pm \sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$.

Propoziţia 5. *Fie* $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ *astfel încât* $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *iar* $m, n \in \mathbb{Q}$. *Atunci* $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ *dacă şi numai dacă* $m^2 + n^2 = 0$.

Demonstraţie. Dacă $m = n = 0$, atunci $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} = 0 \in \mathbb{Q}$. Invers, să presupunem că $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Pătratul acestui număr este tot raţional şi atunci $mn\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$. Însă $\sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $mn = 0$. În cazul în care $m = 0$, avem că $n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, adică $n = 0$. Analog, pentru $n = 0$ obţinem că şi $m = 0$. În concluzie, $m^2 + n^2 = 0$.

Observaţie. Ţinând seama de $\mathbf{P_2}$, ipoteza $\sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ poate fi înlocuită cu $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale acestor rezultate, iar în încheiere sunt propuse alte exerciţii care pot fi rezolvate asemănător.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

Problema 1. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *ecuaţiile*
a) $\frac{2}{3}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{b}=5$; *b)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{18}$.

Soluţie. *a)* Aplicând $\mathbf{P_3}$, obţinem că $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ şi atunci $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{N}$, conform $\mathbf{P_1}$. În plus, deoarece $(3,4)=1$, avem că $\sqrt{a}\,\vdots\,3$, $\sqrt{b}\,\vdots\,4$ şi cercetând posibilităţile existente, găsim unica soluţie $(9,16)$.

b) Ecuaţia se scrie echivalent $\sqrt{2a}+\sqrt{2b}=6$ şi aplicând din nou $\mathbf{P_3}$ şi $\mathbf{P_1}$, obţinem că $\sqrt{2a},\sqrt{2b}\in\mathbb{N}$, deci $a=2x^2$, $b=2y^2$ cu $x,y\in\mathbb{N}$. Înlocuind, găsim că $x+y=3$, de unde $(a,b)\in\{(0,18),(18,0),(2,8),(8,2)\}$.

Problema 2. *Să se arate că* $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Să observăm mai întâi că n şi $n+1$ nu pot fi simultan pătrate perfecte pentru $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă exact unul dintre ele este pătrat perfect, concluzia urmează din $\mathbf{P_4}$. Dacă nici unul nu este pătrat perfect, atunci se poate aplica $\mathbf{P_5}$, dat fiind faptul că $\sqrt{n(n+1)}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (numărul $n(n+1)$ este cuprins strict între pătratele perfecte consecutive n^2 şi $(n+1)^2$).

Problema 3. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^3$ *ecuaţia*

$$\left(m^2-3m+2\right)\sqrt{n^2+n}+\left(p^2-4\right)\sqrt{n^2+5n+6}=0.$$

Soluţie. Singura valoare a lui $n\in\mathbb{N}$ pentru care unul dintre radicali dispare este $n=0$; în acest caz, ecuaţia devine $p^2-4=0$, iar mulţimea soluţiilor este $\{(a,0,2)\mid a\in\mathbb{N}\}$. Dacă $n\neq 0$, suntem în ipotezele $\mathbf{P_5}$:

$$n^2<n^2+n<(n+1)^2;\quad (n+2)^2<n^2+5n+6<(n+3)^2;$$

$$\left(n^2+3n\right)^2<\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)<\left(n^2+3n+1\right)^2,$$

prin urmare $m^2-3m+2=0$ şi $p^2-4=0$, deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{(1,a,2)\mid a\in\mathbb{N}^*\}\cup\{(2,b,2)\mid b\in\mathbb{N}^*\}$.

Probleme propuse.

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţiile:
a) $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=12$; *b)* $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{10}$.

2. Să se arate că ecuaţia $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{p}$, unde $p\in\mathbb{N}$ este prim, are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3. Să se arate că $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

4. Să se arate că:
a) $\dfrac{1}{\sqrt{5n+7}-\sqrt{11}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$; *b)* $\dfrac{1}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{5n+1}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuaţia $\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{11}-\left(2x^2+3x\right)\sqrt{21}=0$.

6. Fie $A=\left\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\mid a,b\in\mathbb{N}^*,\ a,b\le 100\right\}$. Să se afle cardinalul mulţimii $A\cap\mathbb{Q}$.