Observaţii metodice privind punctele de inflexiune

Gabriel MÎRŞANU[1]

În manualul de cl. XI-a [**2**], punctul de inflexiune este introdus prin

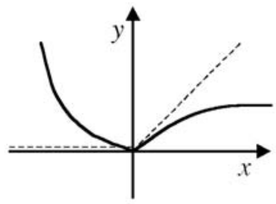
Definiţia 1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă definită pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in I$ distinct de capetele lui I se numeşte punct de inflexiune pentru f dacă există puncte $\alpha < x_0 < \beta$ în I astfel încât f să fie convexă pe $(\alpha, x_0]$ şi concavă pe $[x_0, \beta)$ sau invers.*

Prin câteva contraexemple vom arăta că această definiţie este incompletă şi conduce la erori.

Contraexemplul 1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0 \end{cases}$. Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi avem:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1/\left(1+x^2\right), & x > 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2x/\left(1+x^2\right)^2, & x > 0 \end{cases}.$$

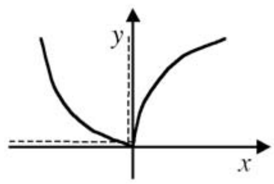
Conform *Corolarului Teoremei Lagrange* obţinem imediat că $f'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = 0$ şi $f'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = 1$. Ca urmare, funcţia f nu este derivabilă în $x_0 = 0$, este convexă la stânga lui x_0 şi concavă la dreapta acestuia. Conform definiţiei de mai sus, $x_0 = 0$ ar fi punct de inflexiune, ceea ce este fals, căci el este evident un *punct unghiular*.



Contraexemplul 2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$. Această funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$ şi avem:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases},$$

$f'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0$, $f'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = +\infty$. Deoarece f este continuă în x_0, convexă la stânga şi concavă la dreapta acestui punct, ar urma că $x_0 = 0$ este punct de inflexiune, ceea ce este fals, $x_0 = 0$ fiind un punct unghiular (unghiul dintre cel două semitangente în origine fiind de $\dfrac{\pi}{2}$.



Aceste contraexemple ne-au determinat să clarificăm noţiunea de punct de inflexiune. Definiţia punctului de inflexiune clară şi corectă apare în [**3**, p. 339] şi în [**1**, p. 17].

Definiţia 2. *Fie $I \subset \mathbb{R}$, I interval, $f : I \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \operatorname{int} I$. Se spune că x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) f este continuă în x_0;

(ii) f are derivată (finită sau infinită) în x_0;

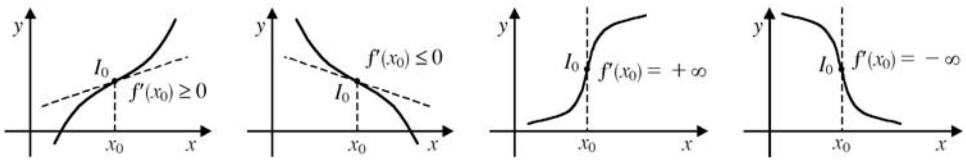
(iii) f este convexă de o parte a lui x_0 şi concavă de cealaltă parte.

---

[1] Profesor, Liceul de Informatică "Gr.Moisil", Iaşi

Dacă x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f, punctul $I_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ de pe graficul acesteia se numeşte *punct de inflexiune al graficului.*

Geometric, a spune că I_0 este punct de inflexiune al graficului înseamnă că graficul admite tangentă în punctul I_0 (care poate fi şi verticală când există $f'\left(x_0\right) = +\infty$ sau $-\infty$) şi că de o parte a lui I_0 graficul este o curbă convexă, iar de cealaltă parte a lui I_0 acesta este o curbă concavă sau că de o parte a lui I_0 tangenta se afla sub grafic, iar de cealaltă parte tangenta se află deasupra graficului (în cazul tangentei verticale, aceasta se află la stânga sau la dreapta graficului). Evident, tangenta dusă într-un punct de inflexiune al graficului traversează graficul. În acest sens, toate punctele unei drepte sunt puncte de inflexiune.



Exemplu. *Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$ [**2**, p.180].

Evident, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi avem $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-1, 1\right\}$ şi $f''(x) = -\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}\right)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-1, 1\right\}$, $f'\left(1\right) = \lim\limits_{x\to 1} f'\left(x\right) = +\infty$, $f'\left(-1\right) = \lim\limits_{x\to -1} f'\left(x\right) = +\infty$ şi $f''\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Formăm tabelul:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$		$+$		$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$-$	0	$+$		$-$	
		$\smile$	i	$\frown$	i	$\smile$	i	$\frown$	

În concluzie, funcţia are trei puncte de inflexiune: $-1, 0, 1$. Indicaţia din manual: "se pune mai întâi condiţia necesară $f''\left(x\right) = 0$ şi apoi se studiază semnul în jurul acestor puncte" este greşită - conduce la un singur punct de inflexiune: $x_0 = 0$. (Această greşeală a fost constatată şi în tezele candidaţilor la admitere la Facultatea de Matematică din Iaşi, cu ani în urmă.)

Bibliografie.

1. M. Ganga - *Elemente de analiză matematică pentru cl. a XI-a, partea a II-a*, Ed. Mathpress, 1997.
2. Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica - *Elemente de analiză matematică, cl. XI-a*, E. D. P., Bucureşti, 1984.
3. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus - *Manual de analiză matematică*, vol. I, ed. a 4-a, E. D. P., Bucureşti, 1971.