Funcţii trigonometrice inverse - aplicaţii

Gheorghe IUREA[1]

În general, elevii au serioase dificultăţi în folosirea funcţiilor trigonometrice inverse. De asemeni, în unele culegeri şi chiar manuale se abuzează de formule cu astfel de funcţii sau sunt date rezolvări greşite.

Vom prezenta, în această notă, modalităţi de abordare a unor probleme cu funcţii trigonometrice inverse care să apeleze la cât mai puţine cunoştinţe din partea elevilor.

Începem prin definirea acestor funcţii:

a) $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definită prin $\arcsin x = \alpha \Leftrightarrow x \in [-1,1]$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha = x$;

b) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, definită prin $\arccos x = \alpha \Leftrightarrow x \in [-1,1]$, $\alpha \in [0,\pi]$, $\cos\alpha = x$;

c) $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, definită prin $\mathrm{arctg}\, x = \alpha \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{tg}\,\alpha = x$;

d) $\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, definită prin $\mathrm{arcctg}\, x = \alpha \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,\pi)$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = x$.

Aplicaţii.

1. *Au loc relaţiile: a*) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $x \in [-1,1]$;

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $x \in [-1,1]$;

c) $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Vom dovedi numai egalităţile *a*) şi *b*).

a) Fie $\arcsin x = \alpha$, deci $x \in [-1,1]$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha = x$. Cum $-x \in [-1,1]$, $-\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin(-\alpha) = -x$, rezultă că $\arcsin(-x) = -\alpha = -\arcsin x$.

b) Fie $\arccos x = \alpha$, deci $x \in [-1,1]$, $\alpha \in [0,\pi]$ şi $\cos\alpha = x$. Cum $-x \in [-1,1]$, $\pi - \alpha \in [0,\pi]$ şi $\cos(\pi - \alpha) = -x$, urmează că $\arccos(-x) = \pi - \alpha = \pi - \arccos x$.

Observaţie. Formulele stabilite sunt utile în determinarea valorilor funcţiilor trigonometrice inverse pentru valori negative. De exemplu, avem $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; $\mathrm{arctg}(-1) = -\mathrm{arctg}\, 1 = -\frac{\pi}{4}$.

2. *Determinaţi un interval de lungime* $\frac{\pi}{12}$ *în care este situat* $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Soluţie. Fie $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{10}}{3} = \alpha$, deci $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$. Încadrăm $\frac{\sqrt{10}}{3}$ între două numere care reprezintă tangentele unor unghiuri cunoscute. Cum $1 <$

[1] Profesor, Liceul "D.Cantemir", Iaşi

$< \dfrac{\sqrt{10}}{3} < \sqrt{3}$, deducem $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$. Folosind monotonia funcţiei tangentă, rezultă $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{10}}{3} \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, iar acest interval are lungimea egală cu $\dfrac{\pi}{12}$.

3. *Calculaţi* $E = \sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \arccos\dfrac{4}{5}\right)$.

Soluţie. Fie $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} = \alpha$, $\arccos\dfrac{4}{5} = \beta$. Atunci $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ şi $E = \sin(2\alpha + \beta) = \sin 2\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos 2\alpha$. Cum $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \dfrac{3}{5}$ şi $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{3}{5}$, găsim $E = 1$.

4. *Arătaţi că* $\sin\left(4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right) = \cos\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}\right)$.

Soluţie. Fie $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} = \beta$; avem : $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg} b = \dfrac{1}{7}$. Relaţia de demonstrat devine $\sin 4\alpha = \cos 2\beta$. Avem $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2 \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{24}{25}$ şi $\cos 2\beta = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{24}{25}$, deci $\sin 4\alpha = \cos 2\beta$.

5. *Determinaţi* $\arcsin(\sin 3)$.

Soluţie. Fie $\arcsin(\sin 3) = \alpha$, deci $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha = \sin 3$. Cum $3 \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, scriem relaţia sub forma $\sin\alpha = \sin(\pi - 3)$, cu $\alpha, \pi - \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Rezultă $\alpha = \pi - 3$, deci $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$.

Observaţii. 1. Din definiţiile funcţiilor trigonometrice deducem: $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1, 1]$.

2. O rezolvare de tipul : $\arcsin(\sin 3) = 3$ este evident greşită întrucât $3 \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. *Determinaţi* $\arcsin\left(\cos\dfrac{7}{2}\right)$.

Soluţie. Notând $\arcsin\left(\cos\dfrac{7}{2}\right) = \alpha$, avem $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\dfrac{7}{2} = \sin\alpha$, de unde $\cos\dfrac{7}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, deci $\dfrac{\pi}{2} - \alpha = \pm\dfrac{7}{2} + 2k\pi$ sau $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{7}{2} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cum $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, găsim $k = 1$ şi $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{7}{2} - 2\pi = \dfrac{7 - 3\pi}{2}$, deci $\arcsin\left(\cos\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{7 - 3\pi}{2}$.

7. *Arătaţi că* $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{\pi}{4}$.

Soluţie. Fie $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \alpha$, $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \beta$, deci $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Atunci $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Cum $\alpha+\beta \in (0,\pi)$, urmează că $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$, adică ceea ce trebuia arătat.

Observaţii. 1. Dacă vom calcula $\sin(\alpha+\beta)$ găsim $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha+\beta \in (0,\pi)$, deci $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$ sau $\alpha+\beta = \dfrac{3\pi}{4}$. În această situaţie calculăm şi $\cos(\alpha+\beta)$ pentru a determina în ce cadran este $\alpha+\beta$ sau aproximând mai bine α,β, găsim $\alpha,\beta \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ şi atunci $\alpha+\beta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; acum putem afirma că $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Evident, o soluţie de tipul "demonstrăm că $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$" este incompletă.

8. *Arătaţi că* $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{12}{13} + \arcsin\dfrac{56}{65} = \pi$.

Soluţie. Fie $\alpha = \arcsin\dfrac{4}{5}$, $\beta = \arcsin\dfrac{12}{13}$; $\alpha,\beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{12}{13}$. Găsim uşor că $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{56}{65}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$, deci $\sin(\pi-(\alpha+\beta)) = \dfrac{56}{65}$, $\pi-(\alpha+\beta) \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, prin urmare $\pi-(\alpha+\beta) = \arcsin\dfrac{56}{65}$, deci $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{12}{13} + \arcsin\dfrac{56}{65} = \pi$.

9. *Arătaţi că* $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \arccos x$, $x \in (-1,1]$.

Soluţie. Fie $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $\beta = \arccos x$, deci $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $\alpha \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\beta = x$, $\beta \in (0,\pi)$. Găsim $\cos 2\alpha = \cos\beta$ cu $2\alpha,\beta \in (0,\pi)$, ceea ce impune ca $2\alpha = \beta$, ceea ce trebuia arătat.

10. *Calculaţi* $2\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{5} + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{4}$.

Soluţie. Fie $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{5}$, $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{4}$, deci $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{1}{4}$, $\alpha,\beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Aproximând α,β, găsim $\alpha,\beta \in \left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$. Calculând $\mathrm{tg}\,(2\alpha+\beta)$, deducem că $\mathrm{tg}\,(2\alpha+\beta) = \dfrac{32}{43}$; $0 < 2\alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$, ceea ce conduce la $2\alpha+\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{32}{43}$, care este valoarea căutată.