O metodă de calcul al distanţei dintre două drepte neparalele în spaţiu

Romanţa GHIŢĂ şi Ioan GHIŢĂ[1]

În multe probleme de geometrie în spaţiu se cere printre altele, aflarea distanţei dintre două drepte necoplanare. Această problemă este, în general, dificilă dacă se încearcă să se pună în evidenţă perpendiculara comună a celor două drepte.

În această notă vom da un mod de rezolvare a acestor chestiuni. În acest scop vom utiliza următoarele propoziţii [**1**]:

1. *Fiind date două drepte necoplanare, există şi este unic un plan care conţine o dreaptă şi este paralel cu cealaltă dreaptă.*

2. *Distanţa dintre două drepte necoplanare este egală cu distanţa de la o dreaptă la planul paralel cu acea dreaptă şi care conţine cealaltă dreaptă.*

Prin urmare pentru a găsi distanţa dintre două drepte necoplanare, ducem printr-o dreaptă planul paralel la cealaltă dreaptă şi calculăm distanţa de la această dreaptă la plan.

Problema 1. *Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, de muchie a. Să se determine distanţa dintre două mediane necoplanare a două dintre feţele sale.* (Olimpiada de matematică , Blaj, 1995).

Soluţie. Fie DE, AF medianele a două feţe (fig.1). Ducem $FG \| DE$ şi atunci $d\,(DE, AF) = d\,(DE, (AGF))$. Considerăm piramida $AGEF$. Dacă d este distanţa dintre DE şi AF avem $V_{AGEF} = \frac{1}{3} S_{AGF} \cdot d$ şi cum $V_{AGEF} = \frac{a^3\sqrt{2}}{96}$ iar $S_{AGF} = \frac{a^2\sqrt{35}}{32}$, găsim $d = \frac{a\sqrt{70}}{35}$.

Problema 2. *Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, cu toate muchiile egale cu a. Să se afle distanţa dintre o mediană a unei feţe laterale şi o diagonală a bazei.* (Olimpiada de matematică, Blaj, 1996).

Soluţie. Să presupunem că mediana este dusă din V, fie acesta VE (fig.2); determinăm distanţa d dintre AC şi VE. Fie $EF \| AC$, deci $d\,(VE, AC) = d\,(AC, (VEF)) = d\,(O, (VEF))$. Avem $V_{OVEF} = \frac{1}{3} S_{VEF} \cdot d$ şi cum $V_{OVEF} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$, $S_{VEF} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$, găsim $d = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Presupunem acum că mediana nu este dusă dusă din V, fie aceasta DE (fig.3). Dacă $EF \| AC$, $F \in (VA)$, atunci $d\,(AC, DE) = d\,(AC, (DEF)) = d\,(O, (DEF))$. Din $V_{ODEF} = \frac{1}{3} S_{DEF} \cdot d$, $V_{ODEF} = \frac{1}{3} OD \cdot S_{EOF} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ şi $S_{DEF} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$, obţinem $d = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Problema 3. *Să se afle distanţa dintre două diagonale a două feţe laterale ce nu au un punct comun, ale unei prisme triunghiulare regulate drepte cu muchiile laterale egale cu muchiile bazei.*

[1] Profesori, Colegiul Naţional "I.M.Clain", Blaj

Soluţie. Fie $AB = a$. Să determinăm distanţa dintre $C'B$ şi $A'C$. Fie $E \in \in (ABC)$ astfel încât $ACBE$ să fie paralelogram (fig.4); deducem că $A'E \| C'B$ şi atunci $d\,(C'B, A'C) = d\,(C'B, (A'CE)) = d\,(B, (A'CE))$. Avem succesiv $V_{BA'CE} = = \frac{1}{3} S_{A'CE} \cdot d$, $V_{BA'CE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, $S_{A'CE} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ şi atunci $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

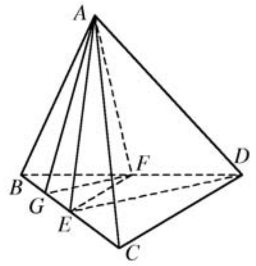

fig.1

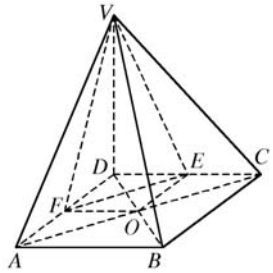

fig.2

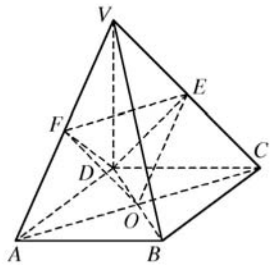

fig.3

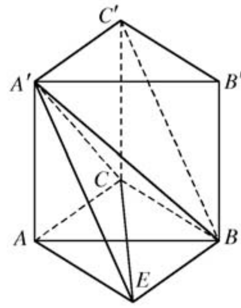

fig.4

Probleme propuse.

1. Să se determine distanţa dintre diagonalele a două feţe laterale alăturate ale unui cub de muchie a, diagonalele neavând punct comun.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a şi M, N, P, Q mijloacele muchiilor (AA'), (AB), (BB') respectiv (BC). Să se afle *a)* $d\,(MN, PQ)$; *b)* $d\,(MN, B'C)$.

3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie a şi M, N, P, Q mijloacele muchiilor (BC), (AC), (CD) şi respectiv (BD). Să se afle $d\,(MN, PQ)$.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paraleliped dreptunghic de muchii $AB = a$, $BC = b$ şi $AA' = c$. Să se afle $d\,(A'B, B'C)$.

5. Fie $ABCD$ şi $ABEF$ pătrate de latură a, cu unghiul planelor lor de $60°$. Calculaţi $d\,(AC, BF)$.

Bibliografie.

1. **I. Cuculescu, C. Ottescu, O. Popescu** - *Manual de geometrie pentru clasa a VIII-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1996.
2. **I. Dăncilă** - *Distanţe între elementele fundamentale ale spaţiului euclidian*, G.M.-9/1995, p.565.
3. **V. Cărbunaru, C. Cărbunaru** - *Culegere de probleme de matematică, clasele V-VIII*, Editura Conviocarb, Bucureşti, 1996.