Un procedeu de rezolvare a unei ecuaţii diofantice de gradul al doilea

Mihai GÂRTAN[1]

Este vorba, în cele ce urmează, de ecuaţia diofantică

$$ax^2 + bxy + cy = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \tag{1}$$

Pentru rezolvarea acesteia în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o înmulţim cu b^2 şi apoi scădem ac^2 din ambii membri ai rezultatutului obţinut:

$$a\left(b^2x^2 - c^2\right) + b^2y\,(bx + c) = b^2d - ac^2 \Leftrightarrow (bx + c)\left(abx + b^2y - ac\right) = b^2d - ac^2. \tag{2}$$

Soluţiile ecuaţiei (2), deci şi ale ecuaţiei date, sunt soluţiile întregi ale sistemelor de două ecuaţii următoare:

$$bx + c = p, \quad abx + b^2y - ac = q, \tag{3}$$

unde p, q sunt divizori oarecare ai lui $b^2d - ac^2$ supuşi restricţiei $pq = b^2d - ac^2$.

Exerciţiul 1. *Rezolvaţi ecuaţia diofantică* $x^2 - 5xy + y = 3$.

Soluţie. Urmând procedeul de mai sus, înmulţim ecuaţia cu 25 şi apoi scădem 1 şi obţinem:

$$\left(25x^2 - 1\right) - 125xy + 25y = 74 \quad \text{sau} \quad (5x - 1)(5x - 25y + 1) = 74.$$

Avem de rezolvat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ opt sisteme:

$$\begin{cases} 5x - 1 = \pm 1 \\ 5x - 25y + 1 = \pm 74, \end{cases} \begin{cases} 5x - 1 = \pm 2 \\ 5x - 25y + 1 = \pm 37, \end{cases} \begin{cases} 5x - 1 = \pm 37 \\ 5x - 25y + 1 = \pm 2, \end{cases} \begin{cases} 5x - 1 = \pm 74 \\ 5x - 25y + 1 = \pm 1 \end{cases}$$

(în fiecare sistem $+$ corespunde cu $+$ şi $-$ cu $-$). Se constată că sistemul format din ecuaţiile $5x - 1 = -1$ şi $5x - 25y + 1 = -74$ admite soluţia $(0, 3)$ şi că sistemele celelalte nu au soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. În concluzie, ecuaţia dată are o soluţie: $(0, 3)$.

Exerciţiul 2. *Determinaţi mulţimea* $A = \left\{x \in \mathbb{Z};\ \frac{3x^2-1}{2x+5} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soluţie. Notând $\frac{3x^2-1}{2x+5} = y$, suntem conduşi la ecuaţia $3x^2 - 2xy - 5y = 1$. Observăm că A este mulţimea acelor $x \in \mathbb{Z}$ pentru care perechea (x, y) este soluţie a acestei ecuaţii diofantice. Înmulţind ecuaţia cu 4 şi scăzând apoi 75, obţinem $\left(12x^2 - 75\right) - 8xy - 20y = -71$, de unde $(2x + 5)(6x - 4y - 15) = -71$. Sistemele asociate sunt:

$$\begin{cases} 2x + 5 = 1 \\ 6x - 4y - 15 = -71, \end{cases} \begin{cases} 2x + 5 = -1 \\ 6x - 4y - 15 = 71, \end{cases} \begin{cases} 2x + 5 = 71 \\ 6x - 4y - 15 = -1, \end{cases} \begin{cases} 2x + 5 = -71 \\ 6x - 4y - 15 = 1 \end{cases}.$$

Ele au soluţiile: $(-2, -11)$, $(-3, -26)$, $(33, 46)$ şi $(-38, -61)$. Ca urmare, $A = \{-38, -3, -2, 33\}$.

Exerciţii propuse.

1) Rezolvaţi următoarele ecuaţii diofantice:
a) $x^2 - xy + 3y = 2$, *b*) $2x + 3xy - 4y^2 = 5$, *c*) $2x^2 - 3xy - y = -22$.

2) Determinaţi mulţimile:
a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z}; \frac{x^2+1}{2x+3} \in \mathbb{Z}\right\}$, *b*) $B = \left\{x \in \mathbb{Z}; \frac{3x^2-1}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$, *c*) $C = \left\{x \in \mathbb{Z}; \frac{3x^2+1}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "C.Negruzzi", Iaşi