Două remarci asupra mediei de ordinul zero

A. VERNESCU [1]

Abstract. Arithmetic, harmonic, geometric and square means of n positive real numbers may be thought of as particular cases of a powered mean by a real number. In this article the arguments for the geometric mean be defined as a powered mean by zero are fully clarified.

Keywords: arithmetic, geometric, harmonic and powered means

MSC 2010: 26E60.

1. Fiind date $n \geq 2$ numere reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, şi un număr real $\alpha \neq 0$, media de putere α a numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$ este, prin definiţie, numărul real strict pozitiv

$$M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) \stackrel{def}{=} \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha},$$

notat pe scurt şi M_α, atunci când nu este posibilă nicio confuzie asupra numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$ (a se vedea [1], [3], [4]). Această definiţie înglobează într-un concept unitar mediile uzuale, deoarece, prin anumite particularizări, se regăsesc câteva dintre acestea: pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = -1$, se obţin media aritmetică, respectiv media armonică a celor n numere, iar pentru $\alpha = 2$, se regăseşte o medie numită media pătratică (având utilizări în teoria aproximării, statistica matematică, teoria cinetico-moleculară şi altele).

Rezultatul principal referitor la mediile de putere îl constituie proprietatea de monotonie în raport cu exponenţii puterilor, adică faptul că, dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ şi $\alpha < \beta$, atunci

$$M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) \leq M_\beta(a_1, a_2, ..., a_n),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$. O demonstraţie elementară a acestui rezultat este prezentată în [4], la pp. 17-18, pentru cazul $\alpha < 0 < \beta$, iar apoi, la pp. 27-29, demonstraţia este completată şi pentru cazurile $0 < \alpha < \beta$, respectiv $\alpha < \beta < 0$.

În scopul de a se extinde media de putere şi în cazul exponentului 0, *se defineşte* media de ordinul 0 ca fiind media geometrică a celor n numere. Prima remarcă pe care o facem este că această definire se efectuează în [3] şi [4] *fără nicio explicaţie ulterioară* a motivului pentru care s-a ales *această* definiţie şi nu alta[2]. Această

[1] Profesor, Bucureşti, Romania; *avernescu@gmail.com*

[2] Desigur, definiţiile nu se demonstrează, dar, ulterior formulării lor, se pot da, eventual, anumite explicaţii, care arată câte ceva din demersurile efectuate, din încercările, frământările şi reformulările petrecute, într-un cuvânt din evoluţia ideilor în cristalizarea noţiunilor şi care explicaţii, în final, pot sugera motivaţia adoptării unei anumite definiţii în detrimentul alteia.

explicaţie poate fi dată într-un mod foarte natural, având în vedere faptul că, fiind fixate cele n numere, funcţia de variabilă α, definită pe $\mathbb{R}^*$

$$\alpha \mapsto \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

este continuă (rezultând din operaţii în număr finit cu funcţii continue) deci, dacă există limita în 0, funcţia poate fi prelungită prin continuitate în acest punct, după procedeul obişnuit care constă în a defini *valoarea* într-un astfel de punct ca fiind chiar *limita* în punctul respectiv[3,4].

2. Se pune deci problema calculului limitei de funcţie

$$L = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}, \tag{1}$$

care se află în cazul exceptat 1^∞. Aplicând procedeul uzual de a aduna şi a scădea 1 la bază, pentru a "organiza" o limită ce conduce la numărul e, s-ar obţine, ca un prim pas, că

$$L = \lim_{\alpha\to 0}(1+\varphi(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}, \varphi(\alpha) = \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha - n}{n}. \tag{1'}$$

În continuare, ar trebui amplificat la exponent în egalitatea (1′) cu $\varphi(\alpha)$ şi continuat calculul în modul uzual în astfel de cazuri:

$$L = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\varphi(\alpha))^{\frac{1}{\varphi(\alpha)}}\right]^{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}}, \tag{1''}$$

după care ar urma un alt calcul standard, bazat pe utilizarea limitei remarcabile

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a, \text{ anume} \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\alpha\to 0}\frac{a_i^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n},$$

deci, din (1″) ar rezulta

$$L = e^{\ln\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}} = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}. \tag{3}$$

Dar, apare un inconvenient: amplificarea cu $\varphi(\alpha)$ din formula (1″) nu este posibilă dacă $\varphi(\alpha) = 0$, pe o întreagă vecinătate a lui 0. Cum poate fi surmontat acest fapt?

3. Răspunsul, cunoscut, este acela că, dacă $\varphi(\alpha) = 0$ pe o mulţime infinită, atunci rezultă că $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$, caz în care calculul devine trivial. În lucrarea [2], prof. dr. *Ion Chiţescu* demonstrează următoarea

Teoremă. *Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere strict pozitive, $n \geq 2$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:*

(P1) *Avem $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$;*

(P2) *Există o mulţime infinită A de numere reale cu proprietatea*

$$a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x = n$$

[3] Şi se va obţine că această limită va fi tocmai media geometrică a celor n numere.

[4] Această prelungire ar permite şi completarea proprietăţii de monotonie enunţate, adăugând şi numărul 0 la mulţimea $\mathbb{R}^*$ a exponenţilor pentru care proprietatea de monotonie are loc.

pentru orice x din A.

Implicaţia (P1) $\Rightarrow$ (P2) este banală. În [2] se demonstrează implicaţia inversă, iar aceasta se face în trei situaţii: 1) mulţimea A este nemărginită superior; 2) mulţimea A este nemărginită inferior; 3) mulţimea A este mărginită. Pentru primele două situaţii, se efectuează un raţionament prin reducere la absurd, bazat, ca elemente tehnice, doar pe limitele de şiruri şi de funcţii. Pentru a treia situaţie, se utilizează teorema de identitate a funcţiilor analitice din analiza complexă (autorul trimite la tratatul clasic: H. Cartan, *Théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* (quatrième édition), Hermann, Paris, 1967).

Aşadar, calculul cuprins în egalităţile (1), (1′) şi (1″), cât şi rezultatul obţinut în formula (3) sunt corecte, în baza teoremei preluate din [2].

4. A doua remarcă pe care o facem este aceea că se poate da încă o demonstraţie rezultatului din Teoremă, în cazul mai restrâns, dar cel mai mai strict legat de problema pusă, în care identitatea $\varphi(\alpha) = 0$ are loc pe o *vecinătate* a lui 0. Demonstraţia pe care o vom prezenta va folosi doar câteva rezultate din partea elementară a teoriei limitelor de funcţii (anume limita remarcabilă (2) şi regula referitoare la limita sumei) precum şi inegalitatea mediilor, a lui *Cauchy*.

Propoziţie (o completare a Teoremei). *Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere strict pozitive, $n \geq 2$. Dacă are loc egalitatea*

$$a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x = n$$

pentru orice $x \in V$, unde V este o vecinătate a lui 0, atunci $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Demonstraţie. Din egalitatea dată rezultă, pentru orice $x \in V$, $x \neq 0$,

$$\frac{a_1^x - 1}{x} + \frac{a_2^x - 1}{x} + ... + \frac{a_n^x - 1}{x} = 0.$$

Trecând la limită pentru $x \to 0$, se obţine, în baza limitei remarcabile (2),

(4) $\quad \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n = 0$, adică $\ln(a_1 a_2 ... a_n) = 0$, de unde $a_1 a_2 ... a_n = 1$.

Fie acum $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$, fixat. Egalitatea precedentă ne dă $a_1^{x_0} a_2^{x_0} ... a_n^{x_0} = 1$, de unde

(5) $\quad \sqrt[n]{a_1^{x_0} a_2^{x_0} ... a_n^{x_0}} = 1.$

Din ipoteză mai rezultă

(6) $\quad \dfrac{a_1^{x_0} + a_2^{x_0} + ... + a_n^{x_0}}{n} = 1.$

Egalităţile (5) şi (6) ne arată că mediile aritmetică şi geometrică ale numerelor $a_1^{x_0}, a_2^{x_0}, ..., a_n^{x_0}$ sunt egale, deci toate numerele sunt egale; din (4) mai rezultă că ele sunt, toate, egale cu 1: $a_1^{x_0} = a_2^{x_0} = ... = a_n^{x_0} = 1$. Întrucât $x_0 \neq 0$, decurge că $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$, ceea ce încheie demonstraţia.

Observăm că demonstraţia putea fi începută şi altfel. Anume, ţinând seama că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x$ este constantă pe $\mathbb{R}$, ea are derivata nulă $f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + ... + a_n^x \ln a_n = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. În particular, $f'(0) = 0$, ceea ce înseamnă relaţia (4), după care demonstraţia se finalizează ca şi mai înainte.

5. Calculul limitei (1), prezentat în prima secţiune, s-a bazat pe procedura de "organizare" a numărului e, care a necesitat condiţia ca expresia cu care se amplifică la exponent să fie diferită de 0, cât şi clarificarea adusă de teoremă (sau de propoziţie). Totuşi, este cunoscută şi o demonstraţie care ocoleşte această procedură, cu singura "concesie" a utilizării regulii lui L'Hospital. O menţionăm acum. Se logaritmează relaţia (1)

$$\ln L = \ln \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha}{n} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha}{n}}{\alpha}.$$

Limita se află în cazul $\dfrac{0}{0}$. Aplicând regula lui L'Hospital, se obţine

$$\ln L = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \ln a_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha}}{1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \ln a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln a_i}{n} =$$

$$= \frac{\ln \prod_{i=1}^{n} a_i}{n} = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n},$$

şi, prin exponenţiere (delogaritmare), se obţine

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

adică s-a regăsit (pe o cale ceva mai artificială) formula (3).

6. Prin cele expuse, am formulat în mod complet explicaţia necesară referitoare la media de putere 0 din teoria mediilor de putere, iar un detaliu tehnic de calcul al limitei (1) a fost clarificat şi cu mijloace elementare.

În completarea afirmaţiei din secţiunea 1, că mediile de ordinul α înglobează într-un concept unitar mediile uzuale, reamintim faptul că valorile exponentului α pot fi extinse şi la dreapta reală încheiată, deoarece au loc binecunoscutele relaţii

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = \min_{1 \le k \le n} a_k, \ \lim_{\alpha \to +\infty} M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_{1 \le k \le n} a_k$$

a căror stabilire nu ridică, însă, nicio dificultate.

Bibliografie

1. P.S. Bullen – *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Acad. Publ., 2003.

2. I. Chiţescu – *O proprietate de unicitate*, Gaz. Mat. A, VIII (1987), Nr. 4, 165-168.

3. N.D. Kazarinoff – *Analytic Inequalities*, Dover Publ., New York, 2003.

4. P.P. Korovkin – *Inequalities*, Mir Publisher, Moscow, 1975.

5. D.S. Mitrinović – *Analytic Inequalities (in cooperation with P. M. Vasić)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.