O metodă de întărire a unor inegalităţi

M. CHIRCIU[1]

Abstract. A geometric inequality proposed as Problem L271 in no. 2/2014 of this journal is strengthened.

Keywords: triangle, inequality in triangle.

MSC 2010: 51M16.

În *Recreaţii Matematice 2/2014* a fost propusă următoarea problemă:

L271. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{bc}{(p-a)^2}+\frac{ca}{(p-b)^2}+\frac{ab}{(p-c)^2}\geq\frac{20R-4r}{3r}. \tag{1}$$

Andi Brojbeanu

În continuare, prezentăm o dezvoltare şi o întărire a acestei inegalităţi:

Propoziţie. *În orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{bc}{(p-a)^2}+\frac{ca}{(p-b)^2}+\frac{ab}{(p-c)^2}\geq\frac{nR}{r}+12-2n, \text{unde } -8\leq n\leq 8. \tag{2}$$

Demonstraţie. Avem:

$$\sum\frac{bc}{(p-a)^2}=\frac{\sum bc\,(p-b)^2\,(p-c)^2}{\prod(p-a)^2}=\frac{r^3\left[p^2\,(r-8R)+(4R+r)^3\right]}{(r^2p)^2}=\frac{p^2\,(r-8R)+(4R+r)^3}{rp^2}.$$

Inegalitatea de demonstrat va fi: $\dfrac{p^2\,(r-8R)+(4R+r)^3}{rp^2}\geq\dfrac{nR}{r}+12-2n\Leftrightarrow(4R+r)^3\geq p^2\left[(n+8)\,R+(11-2n)\,r\right]$. Vom ţine cont de inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\leq\dfrac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)}$ (adevărată din identitatea $H\Gamma^2=4R^2\left[1-\dfrac{2p^2\,(2R-r)}{R\,(4R+r)^2}\right]$, unde Γ este punctul lui Gergonne) şi de condiţia $n+8\geq 0$, care asigură $(n+8)\,R+(11-2n)\,r>0$. Rămâne să arătăm că:

$$(4R+r)^3\geq\frac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)}\cdot\left[(n+8)\,R+(11-2n)\,r\right]\Leftrightarrow(8-n)\,R^2+(2n-15)\,Rr-2r^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(R-2r)\left[(8-n)\,R+r\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ şi condiţia $8-n\geq 0$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Zinca Golescu", Piteşti, Romania; *marin.chirciu@yahoo.com*

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Pentru $n = \dfrac{20}{3}$ se obţine Problema **L271**.

Observaţie. Cea mai bună inegalitate de forma (2) se obţine pentru $n = 8$:
În orice triunghi

$$(3)\quad \frac{bc}{(p-a)^2} + \frac{ca}{(p-b)^2} + \frac{ab}{(p-c)^2} \geq \frac{8R}{r} - 4 \geq \frac{nR}{r} + 12 - 2n, \text{ unde } -8 \leq n \leq 8.$$

Demonstraţie. Prima inegalitate rezultă din (2), pentru $n = 8$. Apoi, $\dfrac{8R}{r} - 4 \geq \dfrac{nR}{r} + 12 - 2n \Leftrightarrow (8-n)(R-2r) \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler şi condiţia $n \leq 8$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Observaţie. Cititorul interesat poate găsi alte exemplificări ale acestui procedeu de dezvoltare şi întărire a unor inegalităţi în lucrările [3] şi [4].

Bibliografie

1. *Recreaţii Matematice 2/2014*, problema L271.
2. O. Bottema, R.Z. Djordjevič, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić – *Geometric Inequalities*, Gröningen 1969, The Netherlands.
3. M. Chirciu – *Inegalităţi geometrice, de la iniţiere la performanţă*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2015.
4. M. Chirciu – *Inegalităţi cu laturi şi raze în triunghi, de la iniţiere la performanţă*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2017.

Recreaţii... matematice

Fie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ şi $n \in N$, $n \geq 4$. Demonstraţi egalitatea:

$$\log_a\left(\sqrt[3]{25+22\sqrt{2}} + \sqrt[3]{25-22\sqrt{2}}\right) - \sum_{k=3}^{n} \log_a\left(1 - \frac{1}{k}\right) =$$

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

(*Răspuns la p. 62*)