O proprietate a polinoamelor de grad par cu coeficienţi reali

A. BLAGA[1]

Abstract. Considering real polynomials having their roots in arithmetic progression, some properties of their derivatives are established.

Keywords: real polynomials, roots in arithmetic progression, derivative of real polynomials.

MSC 2010: 51M16.

Ne vom ocupa de polinoamele de grad par care au toate rădăcinile reale, în progresie aritmetică. Punctul de plecare este următoarea problemă:

Fie $P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$. Să se demonstreze că ecuaţia $P'(x) = 0$ are exact trei rădăcini reale.

Teorema lui Lagrange asigură această proprietate. Observăm că una dintre aceste rădăcini este 4, care este mijlocul intervalelor $[1,7]$ şi $[3,5]$, cât şi a intervalului $[y_1, y_2]$, unde y_1 şi y_2 sunt celelalte două rădăcini ale ecuaţiei $P'(x) = 0$.

Fie numerele x_1, $x_1 + r$, $x_1 + 2r, \ldots, x_1 + (2p-1)r$, unde $r \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, iar $x_1 \in \mathbb{R}$. Avem următorul rezultat:

Propoziţia 1. *Se dă polinomul $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2p-1})(x-x_{2p})$.*

(i) Ecuaţia $P'(x) = 0$ are exact $2p-1$ rădăcini reale distincte.

(ii) Numărul $\beta = \dfrac{x_i + x_{2p-i+1}}{2}$, $i = \overline{1,p}$ este soluţie a ecuaţiei $P'(x) = 0$.

(iii) Numărul β este mijlocul intervalelor $[y_1, y_{2p-1}]$, $[y_2, y_{2p-2}]$, …, $[y_{p-1}, y_{p+1}]$.

Demonstraţie. (i) Din teorema lui Lagrange aplicată pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, avem: $P(x_2) - P(x_1) = (x_2 - x_1)P'(y_1) = 0 \Rightarrow P'(y_1) = 0$, $y_1 \in (x_1, x_2)$; $P(x_3) - P(x_2) = (x_3 - x_2)P'(y_2) = 0 \Rightarrow P'(y_2) = 0$, $y_2 \in (x_2, x_3)$; …; $P(x_{2p}) - P(x_{2p-1}) = (x_{2p} - x_{2p-1})P'(y_{2p-1}) = 0 \Rightarrow P'(y_{2p-1}) = 0$, $y_{2p-1} \in (x_{2p-1}, x_{2p})$. Este evident că aceste valori sunt distincte.

(ii) Avem: $P(x) = (x-x_1)(x-x_{2p})(x-x_2)(x-x_{2p-1})\ldots(x-x_p)(x-x_{p+1}) = \prod\limits_{i=1}^{p}(x^2 - (x_i + x_{2p-i+1})x + x_i x_{2p-i+1}) = \prod\limits_{i=1}^{p}(x^2 - (2x_1 + r(2p-1))x + x_i x_{2p-i+1}) = \prod\limits_{i=1}^{p}\Big((x-\beta)^2 + \alpha_i\Big)$, unde $\alpha_i = x_i x_{2p-i+1} - \big(x_1 + \frac{r}{2}(2p-1)\big)^2$. Prin urmare, $P(x) = (x-\beta)^{2p} + (x-\beta)^{2p-2}\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i + \ldots + (x-\beta)^2 \sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_{p-1} \le p} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{p-1}} + \prod\limits_{i=1}^{p}\alpha_i$.

Forma lui $P'(x)$ este: $P'(x) = 2p(x-\beta)^{2p-1} + (2p-2)(x-\beta)^{2p-3}\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i + \ldots + 2(x-\beta)\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{p-1} \le p} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_{p-1}} = (x-\beta)Q(x)$. Deducem că $P'(\beta) = 0$.

(iii) Dacă $(x-\beta)^2 = t$, ecuaţia $2pt^{p-1} + (2p-2)t^{p-2}\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i + (2p-4)t^{p-3}\sum\limits_{1 \le i \le j \le p}\alpha_i\alpha_j + \ldots + 2\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_{p-1} \le p}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{p-1}} = 0$, are toate rădăcinile $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ reale.

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Eminescu", Satu Mare, România; *alblaga2005@yahoo.com*

Într-adevăr, dacă există o rădăcină $t_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, atunci ecuaţia $(x-\beta)^2 = t_m$ are soluţii complexe, deci numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $P'(x) = 0$ nu mai este $2p-1$, fapt stabilit la punctul (i) al teoremei. Mai mult, $t_i > 0$, căci, în caz contrar, nu avem $2p-1$ soluţii pentru ecuaţia $P'(x) = 0$. Deci $\sqrt{t_1} < \sqrt{t_2} < \ldots < \sqrt{t_{p-1}}$ şi avem numerele $\beta - \sqrt{t_{p-1}}, \ldots, \beta - \sqrt{t_1}, \beta, \beta + \sqrt{t_1}, \ldots \beta + \sqrt{t_{p-1}}$, care sunt soluţiile ecuaţiei $P'(x) = 0$. După cum se observă, notând $y_1 = \beta - \sqrt{t_{p-1}} < y_2 = \beta - \sqrt{t_{p-2}} < \ldots < y_p = \beta < y_{p+1} = \beta + \sqrt{t_1} < y_{2p-1} = \beta + \sqrt{t_p - 1}$, numărul β este mijloc pentru fiecare din intervalele date în teoremă.

În continuare, vom analiza din această perspectivă polinoamele de grad impar. Fie numerele x_1, $x_1 + r$, $x_1 + 2r$, …, $x_1 + (2p-3)r$, $x_1 + (2p-2)r$, unde $r \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, iar $x_1 \in \mathbb{R}$. Avem următorul rezultat:

Propoziţia 2. *Se dă polinomul* $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2p-1})$.

(*i*) *Ecuaţia* $P'(x) = 0$ *are exact* $2p-2$ *rădăcini reale distincte.*

(*ii*) *Dacă* $y_1, y_2, \ldots, y_{2p-2}$ *sunt soluţiile ecuaţiei* $P'(x) = 0$, *numărul* $x_p = x_1 + (p-1)r$ *este mijlocul fiecăruia din intervalele* $[y_1, y_{2p-2}], [y_2, y_{2p-3}], \ldots, [y_{p-1}, y_p]$.

Demonstraţie. (i) Se aplică teorema lui Lagrange, ca în Propoziţia 1.

(ii) Avem: $P(x) = (x-x_1)(x-x_{2p-1})\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})(x-x_p) = (x-x_p)\prod\limits_{i=1}^{p-1}\left((x-\ \beta)^2 + \alpha_i\right)$, unde $\beta = x_i + x_{p-i} = x_p$, iar $\alpha_i = x_i x_{2p-i} - \beta^2$. Astfel, $P(x) = (x-x_p)\left[(x-x_p)^{2p-2} + (x-x_p)^{2p-4}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\alpha_i + \ldots + \prod\limits_{i=1}^{p}\alpha_i\right] = (x-x_p)^{2p-1} + (x-x_p)^{2p-3}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\alpha_i + \ldots + (x-x_p)\prod\limits_{i=1}^{p}\alpha_i$, iar $P'(x) = (2p-1)(x-x_p)^{2p-2} + (2p-3)(x-x_p)^{2p-4}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\alpha_i + \ldots + \prod\limits_{i=1}^{p}\alpha_i$.

Cu notaţia $(x-x_p)^2 = t$, ecuaţia $P'(t) = 0$ este o ecuaţie de gradul $p-1$, care are ca rădăcini numerele $t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1}$. Toate acestea sunt reale şi pozitive, în caz contrar $P'(x) = 0$ nemaiavând numărul stabilit de rădăcini reale de la (i). Rezultă că $y_1 = x_p - \sqrt{t_{p-1}} < y_2 = x_p - \sqrt{t_{p-2}} < \ldots < y_{2p-2} = x_p + \sqrt{t_{p-1}}$, aşadar numărul x_p este mijlocul intervalelor indicate în teoremă.

Recreaţii... matematice

(*Răspuns la recreaţia de la p. 18*)

Iată câte o soluţie pentru fiecare caz:

$$1 + 2 + 3 - 4 \times 5 + 6 + 7 - 8 + 9 = 0$$

$$1 + 2 \times 3 \times 4 + 5 - 6 - 7 - 8 - 9 = 0$$

$$1 \times 2 + 3 + 4 \times 5 - 6 \times 7 + 8 + 9 = 0$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 - 5 \times 6 + 7 + 8 - 9 = 0$$