O privire asupra unei probleme arabe

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. The aim of this Note consists in investigating an old Arabian problem, in order to offer a pattern for the way to find a subject of study starting from a well-known problem.

Keywords: partition, natural number, common multiple.

MSC 2010: 97F80.

Recent, am primit online o veche şi cunoscută *problemă arabă.* Faptul mi-a îndreptat gândul spre alte probleme care, cândva, m-au fascinat: *lupul, capra şi varza,* felurite *probleme cu râuri şi bărci* sau povestirea cu tâlc *Cinci pâni* a lui Ion Creangă.

Acum, am privit cu ,,ochi critic" problema primită, adică mi-am pus întrebări pe marginea ei. În final, s-a adunat un material care constituie un exemplu de modul în care o problemă ajunsă sub privirile noastre poate deveni un subiect de studiu.

Iată problema şi soluţia primite (şi cunoscute):

Problemă arabă. *Un bătrân arab a lăsat moştenire celor trei fii ai săi, prin testament,* 17 *cămile. Testamentul prevedea ca fiul cel mare să primească jumătate din numărul lor, fiul cel mijlociu o treime şi fiul cel mic a noua parte. Cei trei fii nu ajung la o înţelegere şi decid să meargă la un înţelept. Acesta, după ce ascultă prevederea testamentară, procedează astfel: adaugă o cămilă dintr-ale sale la cele* 17 *cămile şi apoi dă celui mare* 9 *cămile (jumătate din numărul de* 18 *cămile), celui mijlociu* 6 *cămile (o treime din acest număr) şi celui mic* 2 *cămile (a noua parte), iar cămila rămasă, cămila sa, şi-a luat-o înapoi.*

Ce dificultăţi i-au făcut pe fiii moştenitori să apeleze la înţelept? Mai întâi, din prevederea testamentară rezultă că nu trebuie împărţite toate cămilele. Într-adevăr, din faptul că $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}<1$ şi $1-\frac{17}{18}=\frac{1}{18}$, urmează că a optsprezecea parte din cele 17 cămile (i.e., mai puţin de o cămilă) ar trebui să nu fie împărţită. Apoi, dacă s-ar respecta testamentul, fiilor nu le-ar reveni un număr întreg de cămile (fiului mare i-ar reveni 8 cămile întregi şi încă o jumătate de cămilă etc.). Evident, aceste dificultăţi apar din cauză că 17 nu este divizibil cu 2, 3 şi 9; în caz contrar, dacă numărul de cămile ar fi fost divizibil cu 2, 3 şi 9, fiecare fiu ar fi putut lua partea sa şi ar fi rămas un număr de cămile neprevăzute lor în testament.

Cum rezolvă înţeleptul problema, ce idee pune la baza rezolvării? Acesta consideră numărul 18, care este cel mai mic număr ce depăşeşte pe 17 şi care este divizibil cu 2, 3 şi 9. În consecinţă, adaugă o cămilă, din propriile cămile, pentru a obţine un număr total de 18 cămile. Raportat la numărul nou de cămile, împărţirea se face uşor: fiul cel mare primeşte 9 cămile, cel mijlociu 6 cămile şi cel mic 2 cămile. Cum la un loc cei trei fii primesc $9+6+2=17$ cămile, mai rămâne o cămilă nedistribuită

[1]Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.ro*

- tocmai cămila adăugată -, pe care înţeleptul şi-o recuperează. O adevărată lovitură de magician! Matematică sau poveste din *O mie şi una de nopţi* !??

Să observăm că înţeleptul, văzând că testamentul nu poate fi respectat literă cu literă, a dat o soluţie aproximativă problemei, soluţie care are în vedere respectarea următoarelor cerinţe fireşti:

a) fiii să primească un număr întreg de cămile;
b) parţile primite de fii să fie proporţionale cu cele cuvenite (prin testament);
c) suma părţilor primite de fii să nu depăşească numărul total al cămilelor.

Să încercăm să desluşim secretul acestui final ,,fericit" al rezolvării problemei arabe. Să vedem în ce măsură procedeul înţeleptului poate fi aplicat şi în cazul altor probleme de acest tip. Faptul că înţeleptul completează cu o singură cămilă numărul lor este accidental, după cum arată următorul

Exemplu. Aceeaşi problemă cu datele: 28 de cămile şi fracţiile $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$.

În acest caz, înţeleptul trebuie să adauge 2 cămile pentru a ajunge la un număr de 30 cămile (număr divizibil cu numitorii fracţiilor), iar părţile fiilor (calculate din 30 de cămile) vor fi: 20 cămile, 5 cămile şi 3 cămile. Se vede că înţeleptul va recupera cele 2 cămile ale sale.

Problemă. *Să se împartă N cămile la k fii $F_1, F_2, ..., F_k$ astfel încât partea fiului F_i, $i = \overline{1,k}$, să fie $\frac{p_i}{q_i}$ din cele N cămile, unde $p_i, q_i \in \mathbb{N}^*$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$ şi $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i} \leq 1$.*

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că fracţiile $\frac{p_i}{q_i}$, $i = \overline{1,k}$, sunt ireductibile. Evident, părţile fiilor trebuie să fie numere întregi de cămile.

I. Cazul în care $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i} = 1$ este trivial: (i) dacă N este divizibil cu numitorii $q_1, q_2, ..., q_k$, atunci partea fiului F_i este $\frac{p_i}{q_i} N \in \mathbb{N}$ şi împărţirea este

$$N = \frac{p_1}{q_1}N + \frac{p_2}{q_2}N + ... + \frac{p_k}{q_k}N; \tag{1}$$

(ii) dacă măcar unul dintre numitori nu divide pe N, împărţirea nu este posibilă.

II. Dacă $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i} < 1$, din numărul N de cămile rămâne o parte nedistribuită fiilor. Se impune să considerăm două subcazuri:

1. N se divide cu $q_1, q_2, ..., q_k$; ca urmare, atât părţile ce revin fiilor cât şi partea rămasă $\alpha = \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}\right) N$ sunt numere naturale şi împărţirea se face exact (i.e., sunt respectate cerinţele din enunţul problemei), fiind dată de

$$N = \frac{p_1}{q_1}N + \frac{p_2}{q_2}N + ... + \frac{p_k}{q_k}N + \alpha. \tag{2}$$

2. N nu se divide cu toţi numitorii $q_1, q_2, ..., q_k$. Împărţirea nu se poate face exact, dar este posibil, după modelul problemei arabe, să dăm problemei o soluţie aproximativă ce verifică condiţiile a) - c) de mai sus.

Fie M primul multiplu comun al numerelor $q_1, q_2, ..., q_k$ mai mare ca N, deci $M > N$. Considerăm numerele: $\frac{p_1}{q_1}M, \frac{p_2}{q_2}M, ..., \frac{p_k}{q_k}M$. Avem:

a) $\frac{p_i}{q_i}M \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $i = \overline{1,k}$;

b) evident, aceste numere sunt proporţionale cu numerele $\frac{p_1}{q_1}N, \frac{p_2}{q_2}N, ..., \frac{p_k}{q_k}N$, factorul de proporţionalitate fiind $\frac{M}{N} > 1$;

c) condiţia $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M \leq N$ este îndeplinită

(i) dacă $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M = N$, echivalent cu faptul că nu mai rămân cămile după ce fii îşi iau părţile $\frac{p_1}{q_1}M, \frac{p_2}{q_2}M, ..., \frac{p_k}{q_k}M$ (aşa cum este cazul în *problema arabă*) şi, deci, avem formula de împărţire a cămilelor:

$$N = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M, \tag{3}$$

(ii) sau dacă $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M < N$, situaţie în care mai rămâne un număr de cămile după ce fii îşi iau părţile cuvenite şi are loc formula

$$N = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M + \beta, \ \text{ unde } \beta = N - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M. \tag{4}$$

Din cele de mai sus rezultă că, dacă $\sum\limits_{i=1}^{i=k} \frac{p_i}{q_i}M > N$, problema nu are soluţie aproximativă (în sensul precizat), deoarece în acest caz condiţia c) nu este îndeplinită.

Exemplu. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ supus condiţiei $30 \leq N \leq 60$. Patru persoane primesc $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}$ din numărul de N cămile. Discuţie după valorile lui N asupra posibilităţii efectuării acestei distribuţii.

Dacă $N = 30$ sau $N = 60$, atunci el este divizibil cu $3, 5, 6, 15$, deci calculul părţilor cuvenite persoanelor conduce la numere întregi. Avem: pentru $N = 30$ părţile sunt $10, 6, 5, 4$ şi mai rămân 5 cămile $(30 = 10 + 6 + 5 + 4 + 5)$, iar pentru $N = 60$ părţile sunt $20, 12, 10, 8$ şi mai rămân 10 cămile $(60 = 20 + 12 + 10 + 8 + 10)$.

Dacă $N = 50$, atunci $M = 60$, părţile cuvenite sunt: $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$, $\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$, $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$, $\frac{2}{15} \cdot 60 = 8$ şi are loc o împărţire a cămilelor de forma (3): $50 = 20 + 12 + 10 + 8$.

În cazul $50 < N < 60$, M şi părţile cuvenite sunt aceleaşi, dar mai rămâne un rest; avem: $N = 20 + 12 + 10 + 8 + \beta$, cu $\beta = N - 50$.

În sfârşit, dacă $30 < N < 50$ problema nu admite nici o soluţie ce să verifice condiţiile a) - c); în acest caz suma părţilor cuvenite, egală tot cu 50, depăşeşte N.