O remarcă asupra verificării rădăcinilor unor ecuaţii iraţionale

Andrei VERNESCU [1]

Abstract. The author offers a methodical remark regarding the roots obtained for an irrational equation.

Keywords: irrational equation, radical, root, injective function.

MSC 2010: 97H30.

1. După cum este binecunoscut, la rezolvarea ecuaţiilor iraţionale care conţin radicali de ordin par, este posibil ca, prin ridicările la putere corespunzătoare, să se introducă rădăcini străine; aceasta, datorită neinjectivităţii funcţiei putere pară. Este deci necesară verificarea, în ecuaţia iniţială, a tuturor rădăcinilor rămase în domeniul de existenţă al ecuaţiei. Legând apariţia rădăcinilor străine de neinjectivitatea menţionată, s-ar putea pune întrebarea: *Oare pot apărea rădăcini străine şi la ecuaţiile iraţionale care conţin radicali de ordin impar?*

2. Pentru a răspunde problemei puse, să examinăm ecuaţia (cu domeniul de existenţă $\mathbb{R}$)

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}. \tag{3}$$

În vederea rezolvării, se efectuează ridicarea la cub, folosind în partea stângă formula $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab\,(a+b)$ pentru $a=\sqrt[3]{x+1}$ şi $b=\sqrt[3]{3x+1}$ şi se aplică ,,artificiul" binecunoscut de înlocuire a sumei cu cel de al treilea radical de ordinul 3 din (1). După calculele simple care se impun, se obţine[2]

$$\sqrt[3]{(x+1)\,(3x+1)\,(x-1)}=-\,(x+1)\,. \tag{4}$$

O nouă ridicare la cub şi alte câteva calcule elementare conduc la ecuaţia rezolvantă

$$x^2\,(x+1)=0, \tag{5}$$

care dă rădăcinile $x_1=x_2=0$ şi $x_3=-1$. Dar numai rădăcina $x_3=-1$ verifică ecuaţia iniţială (1).

Aşadar, răspunsul la problema pusă este afirmativ şi atestă *necesitatea verificării rădăcinilor şi în cazul ecuaţiilor iraţionale care conţin radicali de ordin impar.*

3. Cum se explică apariţia rădăcinii străine, având în vedere că funcţia putere impară (în cazul nostru, puterea a treia) este injectivă?

[1] Universitatea Valahia din Târgovişte; *avernescu@gmail.com*

[2] Desigur, asupra ecuaţiei (2), se poate lucra şi altfel: se observă întâi că $x_1=-1$ este o rădăcină, iar apoi, în cazul că $x\neq-1$, se împart ambii membri prin $\sqrt[3]{x+1}$ etc.

Să rescriem ecuaţia (1) sub forma echivalentă

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{1-x}=0. \tag{6}$$

Să considerăm acum trei numere reale a, b şi c, pentru care

$$a+b+c=0. \tag{7}$$

Din egalitatea $a+b=-c$ rezultă că $(a+b)^3=-c^3$, adică $a^3+b^3+3ab\,(a+b)=-c^3$, din care, înlocuind $a+b$ cu $-c$, se obţine

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0. \tag{8}$$

Deci egalitatea (5) conduce la identitatea (condiţionată) (6). Însă, reciproc, după cum vom arăta imediat, identitatea (6) *nu implică* neapărat egalitatea (5), deci cele două egalităţi nu sunt echivalente. Într-adevăr, are loc identitatea

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}\,(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right], \tag{9}$$

care arată că egalitatea (6) se poate realiza nu numai dacă $a+b+c=0$, ci şi dacă $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ (ceea ce, bineînţeles, înseamnă că $a=b=c$).

Conchidem deci că a ridica la cub ecuaţia $a+b=-c$ sau a înmulţi egalitatea (5) cu suma de pătrate din (7) sunt operaţii echivalente. Dar, pentru a rezolva ecuaţia (1), nu avem altă cale decât eliminarea radicalilor (prin ridicare la cub) urmând găsirea rădăcinilor ecuaţiei rezolvante (3).

Aşadar, în conformitate cu ecuaţia (7), ecuaţia rezolvantă (3) este echivalentă cu

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{1-x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{3x+1}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{1-x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]=0,$$

care înseamnă anularea unuia din factori sau a celuilalt. Rădăcina $x_2=-1$ anulează primul factor din această ecuaţie, iar rădăcina $x_1=0$ anulează cel de al doilea factor. Dar rădăcina $x_1=0$ nu verifică ecuaţia (1). Aceasta este explicaţia apariţiei rădăcinii străine.

4. Enumerăm acum şi alte câteva ecuaţii care prezintă fenomenul semnalat:

a) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{3x-2}$ (Ecuaţia rezolvantă este $6x^3-25x^2+32x-13=0$ şi are rădăcinile $x_1=x_2=1$ şi $x_3=\dfrac{13}{6}$, din care numai ultima convine ecuaţiei iraţionale).

b) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{3x-1}$ (Ecuaţia rezolvantă este $6x^3+7x^2=0$ şi numai rădăcina $x_3=-\dfrac{7}{6}$ convine ecuaţiei iraţionale.)

c) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+2}=\sqrt[3]{4x-2}$ (Ecuaţia rezolvantă este $6x^3+13x^2=0$ şi numai rădăcina $x_3=-\dfrac{13}{6}$ convine ecuaţiei iraţionale.)

Explicaţia dată la punctul **3** este valabilă şi pentru fiecare dintre ecuaţiile a), b), şi c), în parte.