O demonstraţie de un rând pentru iraţionalitatea unor sume de radicali

Marian TETIVA [1]

Abstract. *One line long* proofs are given for the irrationality of some of radicals.
Keywords: rational number, radical, irrationality.
MSC 2010: 97F40.

Am mai scris în paginile acestei reviste despre rezultatul care spune că o sumă de radicali din numere raţionale pozitive poate fi număr raţional numai dacă fiecare termen al sumei este număr raţional. Aici intenţionăm să facem o observaţie referitoare la rezolvarea problemei în cazul radicalilor de ordinul al doilea - valabilă, din păcate, doar pentru sumele de doi sau trei radicali. Mai precis, intenţionăm să dăm demonstraţii ,,de un rând" ale acestor cazuri particulare extrase din următoarea

Teoremă. *Fie numerele $a_1, \ldots, a_n$ raţionale, pozitive şi astfel încât şi $\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}$ este număr raţional. Atunci $\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}$ sunt numere raţionale.*

Menţionăm că rezultatul rămâne valabil şi pentru radicali de ordine oarecare.

Desigur, cazul $n = 1$ este banal, aşa că $n = 2$ este primul care trebuie considerat.

Toată lumea ştie cum se arată că dacă a, b şi $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sunt numere raţionale, atunci $\sqrt{a}$ şi $\sqrt{b}$ sunt, de asemenea, numere raţionale. De exemplu, dacă notăm $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, avem $(x - \sqrt{a})^2 = b$, deci $2x\sqrt{a} = x^2 + a - b$; acum putem împărţi prin $2x > 0$ pentru a deduce că $\sqrt{a} = (x^2 + a - b)/(2x)$ este număr raţional. Similar, $\sqrt{b} = (x^2 + b - a)/(2x)$ este număr raţional.

Să observăm că aici avem deja o demonstraţie *de un rând* a teoremei pentru cazul $n = 2$ - dacă, desigur, ne adresăm cuiva familiarizat cu calculele şi cu faptul că mulţimea numerelor raţionale este închisă faţă de operaţiile elementare, adică formează corp împreună cu adunarea şi înmulţirea, căci: dacă $a > 0$, $b > 0$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sunt raţionale, atunci $\sqrt{a}$ şi $\sqrt{b}$ sunt şi ele raţionale, pentru că

$$\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + a - b}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \text{ şi } \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + b - a}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}.$$

Pornind de la această observaţie ne-am întrebat dacă nu cumva putem face ceva asemănător şi pentru sume de mai mulţi radicali. Răspunsul pentru sume de trei radicali este afirmativ. Dar, mai întâi, încercaţi singuri să rezolvaţi exerciţiile:

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad; *rianamro@yahoo.com*

Exercițiul 1. *Demonstrați că, dacă* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ *și* $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ *sunt numere raționale, atunci* $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ *și* $\sqrt{c}$ *sunt, de asemenea, numere raționale.*

Justificarea pe care o dăm noi este următoarea: $\sqrt{a}$ (de exemplu) este rațional pentru că

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}\Big\{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 + a -$$
$$- \frac{[(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - a + b - c][(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - a - b + c]}{2[(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 + a - b - c]}\Big\}.$$

(Recunoașteți, vă rog, că se putea scrie și pe un rând, dacă notam cumva suma radicalilor! Dar, desigur, nu ne îndoim că toată lumea a înțeles despre ce este vorba.)

Exercițiul 2. *Verificați formula de mai sus și (mai ales) gândiți-vă cum putem ajunge la ea!*

Exercițiul 3. *Demonstrați că, dacă* a, b *și* $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ *sunt raționale, atunci* $\sqrt{a}$ *și* $\sqrt{b}$ *sunt și ele raționale pornind de la faptul că, pentru* $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, *avem* $x^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.

E mai complicat așa, nu? Simetria pare să nu fie de ajutor aici. Mai mult, dacă pentru o sumă de doi radicali putem merge (cu succes) pe acestă cale, pentru sumele de trei radicali problema (tratată astfel) se complică. Verificați că, procedând astfel, putem obține o altă demonstrație de (aproape) un rând a Teoremei în cazul $n = 2$ (de fapt, o altă formă a primei demonstrații). Anume, mergând pe acest fir, putem obține

$$\sqrt{a} = \frac{\left((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 3a - b\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(b-a)},$$

ceea ce furnizează o demonstrație doar dacă $a \neq b$ (cazul $a = b$ trebuie considerat separat; și sporește numărul rândurilor pe care se scrie demonstrația).

Despre $n \geq 4$ vom spune doar că lăsăm cititorul temerar să încerce găsirea unei soluții asemănătoare (sau să arate că o astfel de soluție nu există).

Pentru cei familiarizați cu un limbaj ceva mai avansat din teoria corpurilor întrebarea se pune astfel: *putem arăta că avem*

$$\sqrt{a_i} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}), \ \ 1 \leq i \leq n,$$

într-un mod cât mai direct, prin calcul efectiv?

Bibliografie

1. I. Boreico – *Linear independence of radicals*, The Harvard College Mathematics Review, *http://www.thehcmr.org/issue2₁/mfp.pdf*

2. L.N. Kamnev – *v* – *Iraționalitatea unor sume de radicali*, (în limba rusă), Kvant, 2/1972, pp. 26-27; *http://kvant.mirror1.mccme.ru/1972/02/p26.htm*

3. D.J. Newman, H. Flanders – *Solution of the Problem 4797*, The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 2 (Feb., 1960), pp. 188-189.