Regula lui Sarrus pentru calculul determinanţilor de ordinul 4

Constantin DRAGOMIR[1]

Abstract. In this Note an extension of Sarrus′ rule to the determinantes of fourth order is presented.

Keywords: determinant, permutation, Sarrus′ rule.

MSC 2010: 97H20.

În [**1**] sunt prezentate trei procedee (reguli) de tip Sarrus pentru calculul determinanţilor de ordinul 3.

În această Notă ne propunem să prezentăm o *regulă Sarrus* pentru calculul determinanţilor de ordinul 4.

Fie $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. Ştim că $\det A = \sum\limits_{\sigma\in S_4} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)}$, unde S_4 este mulţimea permutărilor de gradul 4 şi $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + \\ &+ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + \\ &+ a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{42} - \\ &- a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - \\ &- a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}. \end{aligned} \tag{1}$$

Regula lui Sarrus constă în parcurgerea etapelor următoare:

1) Considerăm determinaţii:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix};$$

Δ_1 este de fapt determinantul dat, iar Δ_2 şi Δ_3 se obţin din Δ_1 permutând circular liniile $2, 3$ şi 4.

[1]Profesor, Liceul Teoretic ,,Ion Barbu", Piteşti

2) Adăugăm determinanţilor $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ primele lor trei linii, scrise sub ei:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix}$$

3) Punem în evidenţă patru diagonale principale şi patru secundare (pentru fiecare dintre determinaţii Δ_1, Δ_2 şi Δ_3 prelungiţi).

4) Pentru a vedea ce operaţie trebuie executată în această etapă, sunt necesare câteva consideraţii.

Ne vom referi la determinantul Δ_1; analog, se procedează cu ceilalţi doi. Ataşăm celor opt diagonale d_i, $i = \overline{1,8}$, ale determinantului Δ_1 prelungit, permutările:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Signatura acestora se stabileşte uşor: $\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_3) = \varepsilon(\sigma_5) = \varepsilon(\sigma_7) = +1$, $\varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_4) = \varepsilon(\sigma_6) = \varepsilon(\sigma_8) = -1$.

Considerăm, relativ la Δ_1, suma:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum_{i=1}^{8} \varepsilon(\sigma_i) a_{1\sigma_i(1)} a_{2\sigma_i(2)} a_{3\sigma_i(3)} a_{4\sigma_i(4)} = \\ &= a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + \\ &+ a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \end{aligned} \tag{2}$$

(termenii sunt produse ale elementelor situate pe câte o diagonală, produse luate cu + sau − potrivit cu valoarea signaturei permutării corespunzătoare diagonalei). Diagonalele care produc termeni cu + înaintea lor alternează cu cele care produc termeni precedaţi de −.

Practic, desenăm plin diagonalele principale şi secundare ale determinantului Δ_1, iar apoi, în determinantul prelungit, trasăm celelalte diagonale paralel cu acestea având grijă să le alternăm pe cele pline cu diagonale întrerupte. Ca urmare, scrierea sumei δ_1 se face mecanic: termenii cu + corespund diagonalelor pline, iar cei cu − diagonalelor întrerupte.

În mod similar, relativ la determinanţii Δ_2 şi Δ_3 vom obţine sumele:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= +a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + \\ &+ a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \delta_3 &= +a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + \\ &+ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}. \end{aligned} \tag{4}$$

Scrierea acestora se poate face mecanic după aceeaşi regulă.

5) Însumând egalităţile (2), (3), (4) şi ţinând seama de (1), obţinem:

$$\det A = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \tag{5}$$

formulă ce indică ultima operaţie de efectuat pentru a calcula $\det A$ cu regula lui Sarrus.

Observaţii. 1) Poate fi utilizată, de asemenea, o *regulă a lui Sarrus cu coloane*, care modifică doar etapele 1) şi 2) în *mod evident* (coloanele $2, 3$ şi 4 se permută circular, iar determinaţii Δ_1, Δ_2 şi Δ_3 se prelungesc cu primele trei coloane, puse la dreapta lor).

2) Calcularea determinanţilor de ordinul 4 cu regula lui Sarrus (cu linii sau coloane) comportă un volum de operaţii comparabil cu cel cerut de procedeul dezvoltării determinantului după o linie (sau coloană).

3) Se poate extinde regula lui Sarrus la determinanţi de ordinul $n \geq 5$? Este posibil, dar devine inutilizabilă, căci se complică şi necesită un volum mare de calcule. Vom justifica această afirmaţie.

Un determinant Δ de ordin n are în dezvoltarea sa $n!$ termeni.

Urmând etapele de mai sus ale regulii lui Sarrus, trebuie să considerăm un număr de determinanţi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. Cum fiecare dintre aceştia se prelungeşte cu $(n-1)$ linii (sau coloane), sumele $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ rezultate vor avea $2n$ termeni fiecare. Din faptul că $\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$, rezultă că $n! = k \cdot 2n$, deci $k = \dfrac{(n-1)!}{2}$. Aşadar, trebuie să considerăm $\dfrac{(n-1)!}{2}$ determinanţi auxiliari. Pentru $n = 3$, avem $k = \dfrac{(3-1)!}{2} = 1$, iar pentru $n = 4$, avem $k = 3$ (trei determinanţi auxiliari cum am văzut şi mai sus). Dar, pentru $n = 5$ obţinem $k = 12$, un număr inacceptabil de determinanţi auxiliari.

Exemplu. Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix}$.

Vom folosi regula lui Sarrus cu coloane, pentru a economisi spaţiul.

$$\left|\begin{array}{cccc|ccc} a & x & x & x & a & x & x \\ x & b & x & x & x & b & x \\ x & x & c & x & x & x & c \\ x & x & x & d & x & x & x \end{array}\right. ;\ \delta_1 = abcd - x^4 + x^4 - x^4 + x^4 - acx^2 + x^4 - bdx^2.$$

$$\left|\begin{array}{cccc|ccc} a & x & x & x & a & x & x \\ x & x & x & b & x & x & x \\ x & c & x & x & x & c & x \\ x & x & d & x & x & x & d \end{array}\right. ;\ \delta_2 = ax^3 - x^4 + bx^3 - cdx^2 + cx^3 - abx^2 + dx^3 - x^4.$$

$$\left|\begin{array}{cccc|ccc} a & x & x & x & a & x & x \\ x & x & b & x & x & x & b \\ x & x & x & c & x & x & x \\ x & d & x & x & x & d & x \end{array}\right. ;\ \delta_3 = ax^3 - bcx^2 + dx^3 - x^4 + bx^3 - adx^2 + cx^3 - x^4.$$

Ca urmare avem:

$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -3x^4 + 2(a+b+x+d)x^3 - (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + abcd.$

Exerciţiu. Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}.$

Bibliografie

1. **C. Dragomir** – *Reguli de tip Sarrus pentru calculul determinanţilor de ordin 3*, Recreaţii Matematice, 1/2013, 25-26.
2. **M. Ţena, M. Andronache, D. Şerbănescu** – *Matematica M1*, manual cl. a XI-a, Ed. Art, 2007.
3. **M. Ţena et al.** – *Culegere de exerciţii şi probleme pentru cl. a XI-a*, Ed. Art, 2007.

Recreaţii ... matematice

Abū ʻAbdallāh Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī sau **Abū Jaʻfar Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī** (c. 780 c. 850) - matematician, astronom/astrolog, geograf şi scriitor persan. Este considerat părintele Algebrei.

Savantul a fost întrebat ce valoare reprezintă omul în matematică. Iată răspunsul dat:

Dacă omul are bun simţ şi caracter = 1.
Dacă mai este şi frumos = 10.
Dacă mai are şi bani = 100.
Dacă se mai trage şi dintr-un neam nobil = 1000.
Însă, dacă dispare simbolul bunului simţ şi al caracterului, adică 1, rămân zerourile.

(Internet)

(*Răspuns la ,,recreaţia” de la pag. 25*)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 8 & 3 \\ & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 8 & 3 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 6 \\ & & 1 & 9 \\ \hline & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & 5 & 5 \\ & & 1 & 3 \\ \hline & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Se utilizează descompunerile: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ şi $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ şi se observă că înmulţitorii sunt în mod necesar $11, 19$, respectiv 13. Completările de mai sus sunt unice.