Paritatea rangului matricelor antisimetrice – o demonstraţie elementară

***Cornelia-Livia BEJAN*[1], *Alexandru MARIN*[2]**

Abstract. We give an elementary proof to the well-known result of Algebra, which states that the rank of any skew-symmetric real matrix is even.

Keywords: matrix, skew-symmetric matrix, rank.

MSC 2010: 97H60, 15A12.

În această Notă prezentăm o demonstraţie elementară a unui rezultat bine cunoscut din algebra liniară, anume:

Teoremă. *Rangul unei matrici* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *antisimetrice* (*i.e.*, $A^t = -A$) *este par.*

Acest rezultat poate fi găsit, de exemplu, în [**2**], p. 12 sau în [**1**], p. 586. În demonstraţiile cunoscute se folosesc noţiuni care depăşesc nivelul programelor şcolare.

Sunt necesare câteva pregătiri. Fie $D_{p,q} = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea definită prin: $d_{ij} = 1$, dacă $(i,j) = (p,q)$ sau (q,p); $d_{ij} = 1$, dacă $p \neq i \neq j \neq q$; $d_{ij} = 0$, în restul cazurilor, unde $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se constată uşor că $D_{p,q}$ este o matrice simetrică cu proprietatea că orice matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ înmulţită cu $D_{p,q}$ la dreapta (resp. la stânga), adică $HD_{p,q}$ (resp. $D_{p,q}H$), îşi schimbă coloanele (resp. liniile) p şi q între ele.

Lemă. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este antisimetrică, atunci* $D_{p,q}AD_{p,q}$ *este tot o matrice antiseimetrică şi de acelaşi rang.*

Demonstraţie. Se vede că $D_{p,q}$ este simetrică şi inversabilă. Avem:

$$(D_{p,q}AD_{p,q})^t = D_{p,q}^t A^t D_{p,q}^t = -D_{p,q}AD_{p,q} \text{ şi}$$

$$\operatorname{rg}(D_{p,q}AD_{p,q}) = \operatorname{rg} A.$$

În continuare vom utliza următoarea notaţie: poziţia unui element aflat pe linia l şi coloana c o vom nota cu (l, c).

Demonstraţia Teoremei. Notăm $r = \operatorname{rg} A$ şi vom arăta că r este par. Vom parcurge trei etape:

1. Prin reducere la absurd, arătăm că $r \neq 1$. Dacă am presupune $r = 1$, atunci matricea A are un element nenul a. Deoarece $r = 1$, putem exprima celelalte linii ca multiple de linia care conţine pe a. Folosind antisimetria matricei, ajungem la contradicţia că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha \cdot 0 = -a$. Deci, dacă A nu este matricea nulă, atunci $r \geq 2$.

2. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că A are prima linie (deci şi coloană) nenulă. Într-adevăr, dacă A ar avea primele k linii (deci şi coloane) nule, atunci A s-ar scrie în forma: $\begin{pmatrix} O_k & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & B \end{pmatrix}$, unde $B \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ este antisimetrică şi are prima linie (deci şi coloană) nenulă, iar în acest caz $\operatorname{rg} B = r$.

[1] Prof.dr., Dep. de Mat. şi Inf., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; e-mail: *bejanliv@yahoo.com*

[2] Student, an I, Fac. ETTI, Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; e-mail: *Me.sandi88@yahoo.com*

Din nou, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că A are elementul de pe poziţia (1,2) nenulă. Într-adevăr, dacă pe prima linie a lui A, primul element nenul ar fi pe coloana k, atunci, făcând înmulţirea lui A la dreapta şi la stânga cu $D_{2,k}$ şi ţinând cont de Lemă, obţinem o matrice antisimetrică de acelaşi rang cu A, dar în care elementul de pe poziţia $(1,k)$ îşi schimb;a locul cu cel de pe poziţia $(1,2)$. Astfel, obţinem pe poziţia $(1,2)$ un element $\alpha \neq 0$.

Putem, de asemenea, să presupunem că $\alpha = 1$, întrucât altfel împărţim matricea A prin α. Aşadar, putem presupune că A are forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ -1 & 0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ -a_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Rangul acestei matrici nu se va schimba dacă pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ la coloana C_k adunăm $b_k C_1 - a_k C_2$ şi analog procedăm pe linii. Obţinem astfel o matrice antisimetrică de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

unde B este o matrice antisimetrică de rang $r-2$.

3. Procedând cu matricea B aşa cum s-a procedat cu A în etapa a doua, se ajunge, într-un număr finit de paşi, la o matrice care ar putea avea rangul 1 sau 2. Dar, conform etapei 1, o matrice antisimetrică de rang 1 nu poate apărea. Se ajunge, deci, la o matrice de rang 2, de unde deducem justeţea afirmaţiei enunţate.

Corolar. *Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este antisimetrică şi n este impar, atunci $\det A = 0$.*

Să observăm că demonstraţia obişnuită constă în faptul că $\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

Corolar. *Fie sistemul liniar matriceal $AX^t = 0$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este antisimetrică şi $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.*

i) *Dacă sistemul admite doar soluţia banală, atunci n este par.*

ii) *Dacă sistemul are o infinitate de soluţii, atunci acestea depind de un număr par de parametri.*

Bibliografie

1. **S. Lang** – *Algebra*, Springer, 2002.
2. **F.R. Gantmacher** – *The Theory of Matrices*, vol. 2, Chelsea Publishing Company, 1987 (trad. din l. rusă).