Se poate demonstra teorema Cayley-Hamilton prin calcul direct?

Marian TETIVA [1]

Abstract. We make some remarks regarding a direct proof of Cayley-Hamilton theorem. In the case of a 3×3 matrix we present such a direct proof.

Keywords: characteristic polynomial, Cayley-Hamilton theorem.

MSC 2010: 97D40.

Un recent articol [**1**] al lui **Constantin-Nicolae Beli** arată cum egalitatea dintre determinantul produsului şi produsul determinanţilor a două matrice pătratice (de un ordin) oarecare poate fi dedusă prin calcul direct, făcând toate înmulţirile şi reducerile, ca în cazul matricelor de ordinul al doilea. Este o demonstraţie neaşteptat de elegantă, dacă ţinem cont de faptul că nouă - tuturor - ,,nu ne plac calculele". Putem deci să ne punem şi întrebarea din titlu, adică am vrea să ştim dacă putem demonstra direct, fără a folosi vreun aparat matematic mai dezvoltat următorul rezultat:

Teoremă (*Cayley-Hamilton*)**.** *Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(C)$ o matrice pătratică de ordinul n. De asemenea, fie I_n şi O_n matricea unitate, respectiv matricea nulă de ordin n şi fie s_k suma minorilor săi diagonali de ordin k, pentru fiecare $1 \leq k \leq n$ (astfel că s_1 este urma matricei şi s_n este determinantul ei). Atunci avem*

$$A^n - s_1 A^{n-1} + s_2 A^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} A + (-1)^n s_n I_n = O_n.$$

Diverse demonstraţii ale acestei teoreme celebre pot fi găsite, de pildă, în [**2**] (am ales Wikipedia în loc de o carte, sau mai multe, pentru că e atât de uşor de accesat). Sigur că, de obicei, teorema Cayley-Hamilton se enunţă în forma $P_A(A) = O_n$, unde $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ este polinomul caracteristic al matricei A (iar, în general, dacă $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, atunci $P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$ - o micuţă corecţie este necesară la termenul liber al polinomului pentru a-i calcula valoarea pentru o matrice). Noi am enunţat teorema astfel încât să se vadă coeficienţii polinomului caracteristic, în ideea că ne interesează o demonstraţie directă a ei.

Toată lumea cunoaşte o astfel de demonstraţie (fără ocolişuri) a acestui rezultat în cazul $n = 2$, când relaţia din enunţ se scrie

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I_2 = O_2$$

şi se verifică imediat prin calcul (de altfel acest exerciţiu este propus sau/şi rezolvat în orice manual de algebră liniară). Nu la fel stau lucrurile dacă $n = 3$: presupun că puţini curajoşi s-au aventurat să efectueze calculele pentru a arăta că

$$A^3 - s_1 A^2 + s_2 A - s_3 I_3 = O_3,$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad; e-mail: *rianamro@yahoo.com*

pentru $A \in M_3(\mathbb{C})$ şi

$$s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad s_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad s_3 = \det A.$$

Problema evidentă e calculul lui A^3, care nu pare deloc atrăgător.

Dar A^3 poate fi evitată! Anume, dacă presupunem că A este inversabilă, egalitatea de demonstrat devine echivalentă cu

$$A^2 - s_1 A + s_2 I_3 - s_3 A^{-1} = O_3.$$

Dacă mai ţinem seama şi de faptul că

$$s_3 A^{-1} = \det(A) A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & -d_{21} & d_{31} \\ -d_{12} & d_{22} & -d_{32} \\ d_{13} & -d_{23} & d_{33} \end{pmatrix},$$

unde, pentru fiecare $i, j \in \{1, 2, 3\}$, d_{ij} este minorul elementului a_{ij} (astfel, $s_2 = d_{11} + d_{22} + d_{33}$), verificarea egalităţii prin calcul direct devine o întreprindere rezonabilă. De exemplu, pentru elementul de pe linia a doua şi coloana întâi trebuie să vedem dacă

$$(a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31}) - (a_{11} + a_{22} + a_{33})a_{21} + d_{12} = 0,$$

evident adevărat (nu uităm că $d_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$). Asemănător se arată (prin calcul direct) că fiecare element al matricei $A^2 - s_1 A + s_2 I_2 - s_3 A^{-1}$ este egal cu 0.

Pentru a încheia demonstraţia (pe care o avem deocamdată doar pentru matrice inversabile) folosim un argument standard. Anume, dacă A este o matrice singulară, considerăm pentru fiecare x matricea $A_x = A - xI_3$, care este nesingulară pentru orice x dintr-o vecinătate suficient de mică a originii (deoarece există doar un număr finit de valori ale lui x pentru care $\det(A - xI_3) = 0$ - în acest caz cel mult trei distincte). Prin urmare teorema Cayley-Hamilton funcţionează pentru orice asemenea matrice A_x. Făcându-l pe x să tindă la zero obţinem valabilitatea ei pentru matricea A.

Desigur această demonstraţie "prin calcul direct" are marele dezavantaj că nu poate fi generalizată pentru matrice de un ordin oarecare. În schimb, credem că este folositoare din punct de vedere didactic - se poate prezenta elevilor o asemenea demonstraţie, care nu necesită nici calcule prea complicate, nici dezvoltări (mai mult sau mai puţin) impresionante ale teoriei. În plus, faptul că există o demonstraţie directă pentru matrice de ordinul al treilea ne dă speranţe (şi ar putea să însemne) că există un asemenea argument pentru matrice de orice ordin.

În fine, să mai spunem (ştim că spre dezamăgirea cititorilor, dar nu avem altceva a face decât să ne cerem iertare) că întrebarea din titlu rămâne (şi pentru autor), deocamdată, fără răspuns.

Bibliografie

1. C.-N. Beli – $\det AB = \det A \det B$, GMA 3-4, 2012.

2. – *http:en.wikipedia.orgwiki Cayley-Hamilton_theorem*