O identitate misterioasă

Marian TETIVA [1]

Abstract. The author wants to show the reader (the schoolchild, especially) the ways to find an algebraic identity which hides behind a trigonometric identity, a fact giving the clue for estabilishing the latter one.

Keywords: identity, trigonometric functions.

MSC 2010: 97D50.

Dacă observi că $2^3 + 3^3 + (-5)^3 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-5)$ (şi încă vreo câteva exemple asemănătoare) s-ar putea să ai o bănuială că pentru orice numere u, v, w cu suma $u + v + w = 0$ are loc egalitatea $u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw$ şi probabil că o să reuşeşti să şi demonstrezi că aşa stau lucrurile (de exemplu înlocuind pe w cu $-(u+v)$). Totuşi, zic eu, asta nu înseamnă că ai şi *înţeles* de ce lucrurile stau aşa. Asta se va întâmpla doar în momentul în care afli că $u^3+v^3+w^3-3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$ este o identitate valabilă *oricare* ar fi numerele u, v, w (deci, dacă $u+v+w = 0$, atunci $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 0$). O situaţie similară vrem să discutăm şi noi în cele ce urmează; anume, este vorba despre

Exerciţiul 1. *Să se arate că are loc egalitatea* (*misterioasă*)

$$\cos^2 50° + \cos 50° \cos 70° + \cos^2 70° = \frac{3}{4}.$$

Aceasta este problema 8 de la pagina 9 din [**1**] (noi ne vom strădui să o transformăm din problemă în exerciţiu) care primeşte, în lucrarea menţionată, la aceeaşi pagină, două soluţii. Este o problemă frumoasă (exprimă o identitate în care sunt implicate două cosinusuri care nu pot fi calculate efectiv, oricum nu într-un fel care să fie de folos în acest context) şi generoasă cu profesorii, întrucât diversele ei rezolvări apelează la diferite formule trigonometrice - aşadar, reprezintă o bună modalitate de a exersa aceste formule. Desigur, e nevoie şi de cîte un mic truc de fiecare dată, dar nu unul care să depăşească nivelul de înţelegere şi receptare al elevului mediu.

De exemplu, o primă soluţie foloseşte formulele $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, pentru $a = 60°$ şi $b = 10°$ (trucul nu e deloc artificial, ba chiar e foarte natural). Folosind aceste formule avem

$$\begin{aligned}
&\cos^2 50° + \cos 50° \cos 70° + \cos^2 70° = \\
&= \cos^2(a-b) + \cos(a-b)\cos(a+b) + \cos^2(a+b) = \\
&= 2(\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b) + \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \\
&= 3\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b = \frac{3}{4}(\cos^2 b + \sin^2 b) = \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

deoarece $\cos a = 1/2$ şi $\sin a = \sqrt{3}/2$ (şi, bineînţeles, folosind formula fundamentală $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $t \in \mathbb{R}$).

A doua soluţie din [**1**] se bazează pe transformarea produselor în sume, adică esenţialmente pe formula $\cos a \cos b = (\cos(a-b) + \cos(a+b))/2$ (cu varianta ei $\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$). Încercaţi! (Veţi avea nevoie şi de transformarea sumei de cosinusuri în produs, după care veţi obţine rezultatul ca prin farmec: iată de ce e frumoasă matematica, e plină de surprize - fie şi dacă ne referim doar la matematica de liceu).

Nemulţumirea, după ce ai văzut aceste două soluţii, poate veni însă exact din acelaşi loc de unde vine şi bucuria (aşa se întîmplă şi în viaţă, nu?). Anume, avem două soluţii destul de clare ale aceleiaşi probleme, puţin artificiale, poate, dar, în cele din urmă, frumoase - sau măcar plăcute. Însă nici una dintre ele *nu explică într-adevăr* această identitate: de unde provine ea? Cum s-a gîndit vreodată cineva că suma $\cos^2 50° + \cos 50° \cos 70° + \cos^2 70°$ este egală cu $3/4$? Nu e limpede deloc!

Mărturisesc că eu însumi am trecut multă vreme cu uşurinţă peste această întrebare altminteri perfect justificată. Am rezolvat problema cu elevii poate de cincizeci de ori, folosind fie prima soluţie, fie pe-a doua, fie vreo variantă de-a lor - dar abia după ce a trecut ceva timp mi-am pus această întrebare simplă: de ce, totuşi, $\cos^2 50° + \cos 50° \cos 70° + \cos^2 70° = 3/4$? (La chestiunile cele mai simple, cele mai elementare, ca să zic aşa ne gîndim cel mai greu.) Culmea e că, odată problema pusă, rezolvarea ei a venit aproape de la sine. E suficient să te gîndeşti că o expresie de forma $u^2 + uv + v^2$ aproape că strigă după formula $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + uv + v^2)$ şi găseşti imediat următoarea rezolvare (pe care eu nu am mai văzut-o pe nicăieri - ceea ce nu înseamnă câtuşi de puţin că nu există):

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 50° + \cos 50° \cos 70° + \cos^2 70° = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos^3 50° - \cos^3 70° = \frac{3}{4}(\cos 50° - \cos 70°) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4\cos^3 50° - 3\cos 50° = 4\cos^3 70° - 3\cos 70° \Leftrightarrow \cos 150° = \cos 210°.
\end{aligned}
$$

Am mai avut nevoie de formula pentru cosinusul unghiului triplu $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, care poate nu e chiar uzuală, iar la final de $\cos(360° - t) = \cos t$. De asemenea, trebuie să menţionăm că înmulţirea cu $\cos 50° - \cos 70°$ conduce la o egalitate echivalentă deoarece această diferenţă de cosinusuri este nenulă.

Eu cred că a meritat, pentru că, dacă rescriem puţin demonstraţia de mai sus, vedem că identitatea noastră e doar un caz particular al unei formule mai generale

$$
\cos^2 x + \cos x \cos y + \cos^2 y = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{\cos 3x - \cos 3y}{\cos x - \cos y}\right)
$$

valabile ori de câte ori $\cos x \neq \cos y$ (iar aceasta nu spune nimic altceva decât că $u^2 + uv + v^2 = (u^3 - v^3)/(u - v)$ pentru $u = \cos x$ şi $v = \cos y$).

Iată cum identitatea ce părea atît de misterioasă la început a fost demistificată! Era doar o impostoare! Ori, dacă ne mai gîndim puţin, putem pune problema şi aşa: poate că noi nu ne-am uitat la ea cum trebuie. La urma urmei, ne-a oferit deja destul de mult, şi dacă ne străduim, putem să mai obţinem câte ceva de la ea. De exemplu, acum sunt sigur că veţi putea rezolva următoarele probleme (de fapt, exerciţii):

Exerciţiul 2. *Să se arate că*

$$\cos^2\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos^2\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{4}.$$

Exerciţiul 3. *Să se arate că*

$$\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}=\frac{3}{4}.$$

Să se deducă identitatea generală al cărei caz particular este această egalitate cu sinusuri. (Mai pare ea misterioasă? Cred că nu. Nu-i aşa că ,,noua" identitate astfel obţinută este, practic, tot cea de mai sus, cu cosinusuri? De ce?).

Pentru a încheia, să ne întoarcem puţin la prima soluţie: putem oare să o aplicăm identităţii generale, adică să obţinem

$$\cos^2 x+\cos x\cos y+\cos^2 y=\frac{1}{4}\left(3+\frac{\cos 3x-\cos 3y}{\cos x-\cos y}\right)$$

procedând ca acolo? Pentru asta ar trebui să scriem $x=a-b$, $y=a+b$ (deci a trebuie să fie $(x+y)/2$ şi $b=(y-x)/2$), şi să calculăm, ca la început:

$$\begin{aligned}&\cos^2 x+\cos x\cos y+\cos^2 y=\cos^2(a-b)+\cos(a-b)\cos(a+b)+\cos^2(a+b)=\\&=3\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 a\sin^2 b=3\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{y-x}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{y-x}{2}=\\&=3\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2},\end{aligned}$$

apoi să arătăm că

$$3\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2}=\frac{1}{4}\left(3+\frac{\cos 3x-\cos 3y}{\cos x-\cos y}\right).$$

Evident, nu ne aflăm pe drumul cel (mai) bun, dar am obţinut o altă identitate! Deloc atrăgătoare şi deloc sugestivă, e adevărat, dar dacă urmăm calea din cea de-a doua soluţie obţinem ceva mai interesant. Lăsăm, din nou, cititorului plăcerea de a face acest lucru:

Exerciţiul 4. *Să se arate că are loc identitatea*

$$(2\cos(x+y)+1)(2\cos(x-y)+1)=\frac{\cos 3x-\cos 3y}{\cos x-\cos y}$$

pentru orice numere reale x şi y care îndeplinesc condiţia $\cos x\neq\cos y$.

Exerciţiul 5. *Arătaţi că*

$$\cos^4\frac{\pi}{10}+\cos^3\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}\cos^3\frac{3\pi}{10}+\cos^4\frac{3\pi}{10}=$$

$$= \frac{5}{4}\left(\cos^2\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10}\right) - \frac{5}{16}.$$

Evident, şi aici există o identitate generală. Găsiţi-o! Nu-i aşa că, folosind-o, putem face şi alte lucruri, de exemplu putem calcula $\cos(\pi/5)$?

În încheiere propunem cititorului interesat (şi dornic să vadă dacă a înţeles cu adevărat ce urmăreşte această notă) să stabilească singur ce identitate se ascunde în spatele misterioasei (deocamdată)

$$\tan 20^\circ - \cot 50^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}$$

(tot din [**1**], problema 17, pag. 12; poate fi de ajutor să scrieţi $\tan 140^\circ$ în loc de $-\cot 50^\circ$). Desigur, vă puteţi încerca puterile cu oricare asemenea identitate, sunt destule, atât în cartea menţionată, cât şi în multe alte lucrări mai mult sau mai puţin didactice.

Bibliografie

1. **Traian Cohal** – *Probleme de trigonometrie*, Editura Moldova, 1994.

Recreaţii ... matematice

Răspunsuri la ,,recreaţiile" de la pag. 17:

a) IV + V + VI = XV

V + V + VI = XVI

V + VI − VI = X − V

b) IV + V + V = XIV

V + V + V = X + V

c) X + IV + VI = XX

Săgeţile indică modificările prin care s-au obţinut aceste egalităţi.