Problema L222 din nr. 1/2012 revizitată

Nota Redacţiei. *Problema L222* a atras atenţia mai multor autori, care au trimis observaţiile lor redacţiei revistei. Este vorba de inegalitatea

$$(1)\qquad a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq\frac{18}{a+b+c},\quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*,$$

Florin Stănescu – *Recreaţii Matematice - 1/2012*

care se poate scrie şi în forma

$$(2)\qquad \frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq\frac{18}{a+b+c},\quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*.$$

În numărul următor, *Recreaţii Matematice - 2/2012,* 120-123, sunt date mai multe soluţii pornind de la forma (2) a inegalităţii şi utilizând inegalitatea mediilor, inegalitatea Cebîşev, inegalitatea Bergström sau a altor procedee de către **Fl. Stănescu**, autorul problemei, **T. Zvonaru** şi **D. Văcaru.**

Între timp, **Ioan Viorel Codreanu** ne trimite trei soluţii pornind de la forma (1) a inegalităţii, iar **Dumitru M. Bătineţu-Giurgiu** şi **Neculai Stanciu** propun o generalizare a acesteia. Publicăm mai jos aceste materiale.

I. Soluţii la Problema L222 date de I.V. Codreanu.

Soluţia 1. Folosind inegalitatea mediilor obţinem

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2\sum\frac{a}{bc}.$$

Este suficient să arătăm că

$$2\sum\frac{a}{bc}\geq\frac{18}{\sum a}\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)\geq 9abc.$$

Folosind inegalitatea mediilor avem: $\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}$ şi $\sum a^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ şi, după înmulţirea acestor inegalităţi, obţinem rezultatul dorit.

Soluţia 2. Folosind inegalitatea Bergström, vom avea

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\sum\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}}+\sum\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a}}\geq 2\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum\frac{1}{a}}=2\sum\frac{1}{a}$$

şi cum $(\sum a)\left(\sum\frac{1}{a}\right)\geq 9$, obţinem imediat inegalitatea din enunţ.

Soluţia 3. Putem presupune că $a \le b \le c$; ca urmare $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \le \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$. Folosind inegalitatea lui Cebîşev, obţinem:

$$\begin{aligned}3\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) &\ge \left(\sum a\right)\left(\sum\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right)=2\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\ge\\ &\ge \frac{2}{3}\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2 \ge \frac{2}{3}\cdot 9\left(\sum\frac{1}{a}\right)\ge\frac{54}{\sum a},\end{aligned}$$

după care rezultă inegalitatea de stabilit.

II. O generalizare a Problemei L222 dată de D.M. Bătineţu-Giurgiu şi N. Stanciu.

Generalizarea pe care o propun autorii este următoarea:

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $m \in [1, \infty)$, atunci

$$a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)+b\left(\frac{1}{c^m}+\frac{1}{a^m}\right)+c\left(\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}\right)\ge\frac{2\cdot 3^m}{(a+b+c)^{m-1}}. \tag{3}$$

Demonstraţia 1. Avem:

$$\begin{aligned}\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)&=\frac{a}{b^m}+\frac{b}{a^m}+\frac{b}{c^m}+\frac{c}{b^m}+\frac{c}{a^m}+\frac{a}{c^m}=\sum\frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{(ab)^m}=\\&=\sum\frac{a^{m+1}}{(ab)^m}+\sum\frac{b^{m+1}}{(ab)^m}.\end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea lui J. Radon [**1**]:

$$\frac{x_1^{m+1}}{y_1^m}+\frac{x_2^{m+1}}{y_2^m}+\frac{x_3^{m+1}}{y_3^m}\ge\frac{(x_1+x_2+x_3)^{m+1}}{(y_1+y_2+y_3)^m},\quad \forall x_k, y_k \in \mathbb{R}_+^*, k=1,2,3,$$

vom obţine

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)\ge\frac{2(a+b+c)^{m+1}}{(ab+bc+ca)^{m+1}}.$$

Deoarece $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, obţinem

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)\ge\frac{2(a+b+c)^{m+1}}{(a+b+c)^{2m}}\cdot 3^m=\frac{2\cdot 3^m}{(a+b+c)^{m-1}},$$

ceea ce era de demonstrat.

Demonstraţia 2. Corespunde Soluţiei 3 din [**2**]. Se observă că

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)=\sum\frac{b+c}{a^m}=\sum\frac{(b+c)^{m+1}}{(a\,(b+c))^m},$$

de unde, aplicând inegalitatea lui Radon, deducem că

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)\geq\frac{2^{m+1}\,(a+b+c)^{m+1}}{2^m\,(ab+bc+ca)^m}$$

şi, cum $(a+b+c)^2\geq 3\,(ab+bc+ca)$, deducem uşor inegalitatea (3).

Demonstraţia 3. Corespunde Soluţiei 1 din [**2**]. Aplicând inegalitatea mediilor obţinem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)=\sum\frac{b+c}{a^m}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}{(abc)^m}}\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}}{(abc)^m}}=\frac{6}{\sqrt[3]{(abc)^{m-1}}}.$$

Cum $a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$, rezultă că pentru ultima fracţie avem

$$\frac{6}{\sqrt[3]{(abc)^{m-1}}}\geq\frac{6\cdot 3^{m-1}}{(a+b+c)^{m-1}},\quad\forall m\in[1,\infty),$$

şi, drept consecinţă, obţinem inegalitatea (3).

Demonstraţia 4. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $a\leq b\leq c$ şi atunci $\frac{1}{a^m}\geq\frac{1}{b^m}\geq\frac{1}{c^m}$ şi $b+c\geq c+a\geq a+b$. Aplicăm inegalitatea lui Cebîşev şi obţinem

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)=\sum\frac{b+c}{a^m}\geq\frac{2}{3}\cdot(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)$$

şi, prin aplicarea inegalităţii lui Radon ultimei paranteze, rezultă că

$$\sum a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)\geq\frac{2}{3}\cdot(a+b+c)\cdot\frac{(1+1+1)^{m+1}}{(a+b+c)^m}=\frac{2\cdot 3^m}{(a+b+c)^{m-1}}$$

şi astfel demonstraţia este încheiată.

Bibliografie

1. **D.M. Bătineţu-Giurgiu** – *Aplicaţii la inegalitatea lui Radon*, Gazeta Matematică, nr. 7-8-9/2010, 359 – 362.
2. **T. Zvonaru** – *Câteva soluţii la problema L. 222 din Recreaţii Matematice, Nr. 1/2012*, Recreaţii Matematice, nr. 2/2012, 120-123.