

Reguli de tip Sarrus pentru calculul determinantilor de ordin 3

*Constantin DRAGOMIR*¹

Abstract. In this Note some type Sarrus procedures for calculation of the determinants of third order are presented.

Keywords: determinant, Sarrus' rule.

MSC 2010: 97H20.

Valoarea unui determinant de ordin 3 este dată de formula

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21},$$

elementele determinantului aparținând unui corp \mathbb{K} (în particular \mathbb{R} sau \mathbb{C}).

Pentru calculul practic al acestei valori este binecunoscută *regula lui Sarrus* (**Pierre Frédéric Sarrus**, 1798-1861), pe care este util să o reamintim.

Regula lui Sarrus cu linii presupune trei etape: *1L) se scriu primele două linii sub determinant; 2) se pun în evidență trei diagonale principale și trei secundare; 3) produsele elementelor de pe fiecare dintre diagonalele principale sunt termenii cu + din (1), iar cele relativ la diagonalele secundare sunt termenii cu -.*

Regula lui Sarrus cu coloane folosește coloane în loc de linii, ceea ce revine la înlocuirea etapei 1L) cu: *1C) se scriu primele două coloane la dreapta determinantului și păstrarea etapelor 2) și 3).* Aceste reguli sunt ilustrate de schemele următoare:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

În această Notă vom prezenta alte câteva procedee (reguli) de calcul al determinantului de ordin 3 înrudite cu regulile de mai sus și diferind de ele doar prin construcția auxiliară din etapa 1L) sau 1C) - celelalte două etape rămânând neschimbate.

Primul procedeu. a) *cu linii.* Se vor urma etapele: *1'L) se scrie prima linie a determinantului sub determinant și linia a treia deasupra lui ; 2'L) diagonalele principale și secundare sunt marcate în prima schemă din 3); 3'L) aceeași ca 3).*

b) *cu coloane.* Se parcurg etapele: *1'C) se scrie prima coloană a determinantului la dreapta lui și coloana a treia la stânga lui; 2'C) diagonalele sunt marcate în a doua schemă din 3); 3'C) aceeași ca 3).*

¹Profesor, Liceul Teoretic „Ion Barbu”, Pitești

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} , \quad \begin{array}{c|ccc|c} a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{array}$$

Al doilea procedeu. Este un procedeu mixt, care utilizează atât linii cât și coloane. În prima etapă efectuăm următoarele operații: prima linie a determinantului se pune sub el, a treia linie se pune deasupra lui, prima coloană se pune la dreapta lui, iar ultima coloană la stânga lui.

În a doua etapă indicăm două moduri de a pune în evidență diagonalele, ce se desprind ușor din schemele următoare:

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \end{array}$$

În fine, în a treia etapă se vor scrie termenii sumei din (1) la fel ca și în toate procedeele precedente.

Observație. Practic, nu se vor scrie în întregime liniile și coloanele care bordează determinantul, ci numai elementele care sunt necesare la trasarea diagonalelor. Astfel, la prima schemă din (4) se vor scrie în afara determinantului numai a_{13}, a_{31}, a_{11} și a_{33} , iar la a doua schemă numai a_{11}, a_{33}, a_{31} și a_{13} .

Al treilea procedeu. Este simetric față de linii și coloane și nu comportă decât o singură variantă. Nu vom mai borda determinantul cu linii și coloane, ci vom scrie în afara lui numai elementele necesare. Etapele procedeuului sunt: 1) în dreptul liniei de mijloc a determinantului se scriu: a_{21} la dreapta și a_{23} la stânga, iar în dreptul coloanei de mijloc se scriu: a_{12} sub determinant și a_{32} deasupra lui; 2) diagonalele sunt indicate în schema ce urmează:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & a_{32} & & & \\ & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & & & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ & & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & & & & & & & a_{12} \end{array}$$

3) se scrie suma din (1) în mod obișnuit.

Observații. 1) Comparativ, utlimul procedeu are avantajele: este simetric, diagrama (5) se formează ușor, toate elementele scrie sunt folosite.

2) Schemele de mai sus folosesc ca elemente grafice numai linii drepte; regula triunghiurilor folosește atât linii drepte cât și triunghiuri.