CUM CONCEPEM ... CUM REZOLVĂM

Condiţii de simetrie relativ la punctele O, H, G, I

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. In this paper, the author argues on the actual possibility of a highschool pupil to work out an own paper inside the bounds of his knowledge. This point of view is supported on the basis of an elementary study on certain symmetry properties of the O, H, G, I points of a triangle.

Keywords: circumcenter, orthocenter, centroid, incenter.

MSC 2000: 51M04.

În rândurile care urmează, ne vom adresa acelor elevi cu talent aflaţi la prima tentativă de obţinere a unei note matematice. Aceştia se întreabă în mod firesc: *De unde iau un subiect? Pot să duc la capăt subiectul ales?* Răspunsul este: *DA, cu siguranţă DA!*

Cunoştinţele dobândite din manuale sunt suficiente pentru ca un elev să poată iniţia şi realiza o notă matematică proprie. Dacă elevul are şi o oarecare practică la revistele de matematică şi o experienţă de participant la concursuri şi olimpiade, nota se poate ridica la un nivel superior de calitate.

Subiectul unei Note poate fi sugerat de profesor, dar poate fi găsit şi de elevul însuşi dacă are puţină curiozitate şi iniţiativă. Ca model, vom formula o întrebare (adică, vom introduce un subiect) pe care şi-ar putea-o pune orice elev; mai mult, tratarea completă a subiectului este elementară şi uşor de făcut de orice rezolvitor de probleme propuse în reviste.

Ne referim la punctele O, H, G, I ale unui triunghi. Din curiozitate, ne întrebăm:

pot fi simetrice faţă de o latură a triunghiului sau faţă de un vârf al său două dintre punctele O, H, G, I?

Imediat, cu câteva observaţii simple aducem clarificări în privinţa subiectului:

1) Punctele G şi I sunt întotdeauna interioare triunghiului, deci perechea (G, I) nu poate avea niciuna dintre proprietăţile de simetrie menţionate.

2) Relativ la punctele O şi H ştim că: i) sunt în interiorul triunghiului, dacă acesta este ascuţitunghic; ii) sunt în exteriorul triunghiului, dacă acesta este obtuzunghic; iii) în cazul triunghiului dreptunghic H coincide cu vârful unghiului drept, iar O este mijlocul ipotenuzei. Rezultă că numai pentru triunghiurile obtuzunghice pot exista perechi de puncte simetrice.

3) Este utilă şi observaţia: dacă $\triangle ABC$ este obtuzunghic cu $m(\widehat{A}) > 90°$, atunci H se află în unghiul opus la vârf unghiului obtuz $\widehat{A}$ şi O se află în semiplanul determinat de dreapta BC ce nu conţine vârful A. Ca urmare, avem: i) simetrice faţă de vârful A pot fi punctele din perechile: (H, G), (H, I) şi (H, O); ii) simetrice faţă de dreapta BC pot fi cele din perechile: (O, G), (O, I) şi (O, H).

4) În sfârşit, constatăm uşor că $\triangle ABC$, $m(\widehat{A}) > 90°$, este isoscel, cu $AB = AC$, dacă una dintre cele şase perechi rămase în discuţie are proprietatea de simetrie

[1]Prof. dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi”, Iaşi

corespunzătoare. În acest caz, punctele O, H, G, I se află pe axa AA' (A' notează mijlocul laturii $[AB]$) şi avem ordinele: $A' - A - H$ şi $A - A' - O$.

Aşadar, mulţimea triunghiurilor obtuzunghice şi isoscele este cadrul firesc al problemei propuse. Aceasta se reduce la şase probleme simple, uşor de rezolvat de către un elev care are cunoştinţe de trigonometrie. Le vom aborda pe rând.

Propoziţia 1. *Dacă H şi G sunt simetrice faţă de vârful A al $\triangle ABC$, atunci triunghiul este obtuzunghic isoscel şi având* $\cos A = -\dfrac{1}{4}$ (*echivalent,* $2a^2 = 5l^2$, *unde a şi l notează lungimea bazei, respectiv a laturii triunghiului*).

Demonstraţie (Fig. 1)**.** Faptul că $\triangle ABC$ este obtuzunghic isoscel a fost deja stabilit. Condiţia de simetrie $AH = AG$ se mai scrie $A'H - A'A = \dfrac{2}{3}A'A$, deci $A'H = \dfrac{5}{3}A'A$ sau

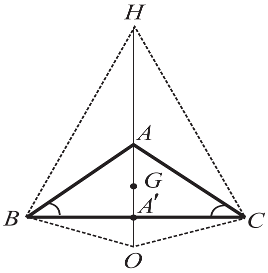

Fig.1

$$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{5}{3}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right).$$

Ca urmare, $\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{5}{3}$ şi, deci, $\cos A = -\dfrac{1}{4}$.

Pe de lată parte, utilizând faptul că în $\triangle AA'B$ avem $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{2l}$, obţinem $\cos A = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \cos A = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2l^2} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 2a^2 = 5l^2$, ceea ce încheie demonstraţia.

Propoziţia 2. *Dacă O şi G sunt simetrice faţă de latura $[BC]$ a $\triangle ABC$, atunci triunghiul este obtuzunghic isoscel şi îndeplineşte condiţia* $\cos A = -\dfrac{1}{4}$ (*echivalent,* $2a^2 = 5l^2$).

Demonstraţie (Fig. 1)**.** Condiţia de simetrie $A'O = A'G$ este echivalentă cu $OB = BG$, adică $BG = R$ (raza cercului circumscris $\triangle ABC$). În $\triangle BA'G$ avem: $BG^2 = A'B^2 + A'G^2$, deci $R^2 = \dfrac{a^2}{4} + \left(\dfrac{A'A}{3}\right)^2$. Cum $2R = \dfrac{a}{\sin A}$ şi $A'A = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$, obţinem relaţia $\dfrac{1}{\sin^2 A} = 1 + \dfrac{1}{9}\operatorname{ctg}^2\dfrac{A}{2}$ echivalentă cu $9\cos^2 A = 4\cos^4\dfrac{A}{2}$. Extrăgând rădăcina pătrată, urmează: $-3\cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow -3\cos A = 1 + \cos A \Leftrightarrow \cos A = -\dfrac{1}{4}$ etc.

Observaţie. Comparând rezultatele precedente, constatăm că *punctele H şi G sunt simetrice fată de vârful A al $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă O şi G sunt simetrice faţă de BC*. Faptul se explică simplu dacă ţinem seama că G se află pe dreapta lui Euler şi $HG = 2OG$: $AH = HG \Leftrightarrow HG = 2AG \Leftrightarrow 2OG = 2AG \Leftrightarrow OG = AG \Leftrightarrow OG = 2A'G \Leftrightarrow A'O = A'G$.

Cu mijloace asemănătoare, vom stabili condiţiile în care punctul I este simetricul lui H faţă de A sau el este simetricul lui O faţă de BC.

Propoziţia 3. *Dacă punctele H şi I sunt simetrice faţă de vârful A al $\triangle ABC$, atunci triunghiul este obtuzunghic isoscel şi* $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{8}(\sqrt{33}-1)$ *(echivalentă cu relaţia* $4a=(\sqrt{33}-1)l$*).*

Demonstraţie (Fig. 2)**.** Condiţia $AH = AI$ se scrie în forma $A'H - A'A = A'A - A'I$ sau $A'H = 2A'A - A'I$ sau, încă,

$$\left|\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\right| = 2\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right).$$

Cu calcule simple se obţine

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

de unde, înmulţind ambii membri cu $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$, deducem

$$(*) \qquad 4\sin^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}-2=0,$$

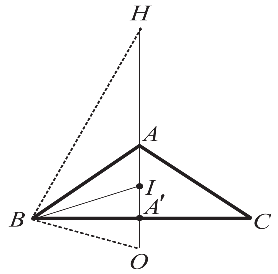
Fig.2

relaţie echivalentă cu $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{8}(\sqrt{33}-1)$.

În sfârşit, cu ajutorul relaţiei $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{2l}$ $(\triangle AA'B)$, se arată uşor că (*) este echivalentă cu $4a=(\sqrt{33}-1)l$.

Propoziţa 4. *Dacă punctele O şi I sunt simetrice faţă de BC, atunci $\triangle ABC$ este obtuzunghic isoscel cu* $A=\dfrac{3\pi}{5}$ *(echivalent,* $\dfrac{a}{l}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ *(secţiunea de aur)).*

Demonstraţie. Condiţia de simetrie $A'O = A'I$ revine la $BI = R$. În $\triangle BA'I$ avem $R^2 = r^2+\dfrac{a^2}{4}$, unde r este raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Ţinând seama de relaţiile $R=\dfrac{a}{2\sin A}$ şi $r=\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$ $(\triangle BA'I)$, obţinem:

$$(**) \qquad \frac{1}{\sin^2 A}=\operatorname{tg}^3\frac{B}{2}+1 \Leftrightarrow \sin^2 A=\cos^2\frac{B}{2} \Leftrightarrow \sin A=\cos\frac{B}{2}.$$

Cum $B+\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ $(\triangle AA'B)$, ultima relaţie devine $\sin A=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{4}\right)$ şi pentru determinarea lui A avem ecuaţia

$$\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{4}\right),\quad A\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

Observăm că $A=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{A}{4}$, adică $A=\dfrac{\pi}{3}$, nu convine problemei, iar $A+\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{A}{4}\right)=\pi$ conduce la soluţia $A=\dfrac{3\pi}{5}$.

Vom exprima această condiţie în funcţie de laturi scriind ultima relaţie (**) în forma $8\sin^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{A}{2} = 1+\cos B$ şi înlocuind în aceasta $\sin\dfrac{A}{2} = \cos B = \dfrac{a}{2l}$ şi $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{4l^2}}$; vom obţine $2\dfrac{a^2}{l^2}\left(1-\dfrac{a}{2l}\right) = 1$ sau, cu $t = \dfrac{a}{l}$, ecuaţia $2t^2\left(1-\dfrac{t}{2}\right) = 1$. Ecuaţia în t este echivalentă cu $(t-1)(t^2-t-1) = 0$ şi, cum $t \neq 1$, are soluţia admisibilă $t = \dfrac{a}{l} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A mai rămas de considerat perechea (O, H) : punctele O şi H pot fi simetrice faţă de un vârf al triunghiului? Dar faţă de o latură? Lăsăm cititorul să dovedească (cu mijloace de acelaşi fel sau altele!) următoarele afirmaţii:

Propoziţia 5. *Dacă punctele O şi H sunt simetrice faţă de vârful A al $\triangle ABC$, atunci triunghiul este obtuzunghic isoscel şi $A = \dfrac{2\pi}{3}$ (i.e., dacă centrul cercului lui Euler cade într-un vârf al $\triangle ABC$, atunci triunghiul este obtuzunghic isoscel cu acel vârf de $120°$).*

Propoziţia 6. *Oricare ar fi un triunghi, punctele O şi H nu pot fi simetrice faţă de vreuna din laturile sale.*

Observaţii. 1) Fiecare dintre condiţiile de simetrie impuse în Propoziţile 1-5 determină *în mod unic* (până la asemănare de triunghiuri) un anumit triunghi obtuzunghic isoscel. În total se obţin patru astfel de triunghiuri (v. Observaţia de după Propoziţia 2).

2) Propoziţiile 1-5 admit şi reciproce valabile; altfel spus, condiţiile de simetrie impuse sunt în fiecare caz şi necesare, nu numai suficiente (verificaţi!).

Elevul care a parcurs atent rândurile acestei Note va constata că s-a confruntat cu probleme mult mai dificile cu prilejul concursurilor şcolare sau ca rezolvitor de probleme propuse în diverse reviste. Dificultatea se află în altă parte: subiectul de lucru, tema de studiu. Nu este de ajuns să ai cunoştinţe temeinice şi să fii un bun rezolvitor de probleme! Va trebui să fii în posesia unui subiect de lucru, ce poate apărea (se iveşte!) în felurite moduri: din curiozitate, dintr-o inspiraţie fericită, întâmplător, graţie unei intuiţii profunde, sugerat de o problemă sau un articol etc. Cu timpul, producerea de subiecte devine o obişnuintă şi, confruntat cu o ,,inflaţie" de subiecte, apare necesitatea selectării şi abordării doar a celor mai valoroase dintre ele.

Recreaţii ... matematice

Răspuns la ,,*recreaţia*" de la pag. 33.

Avem: a) pentru $44 = 28$ putem scrie $4!+4 = 28$; b) pentru $444 = 28$ putem scrie $4!+\sqrt{4}+\sqrt{4} = 28$; c) pentru $n = 2k$ (par) gândim expresia ca fiind $4\,4\underbrace{4\,\ldots\,4}_{2(k-1)} = 28$, reducem la cazul a) şi scriem $4!+4+(4-4)+\ldots+(4-4) = 28$ ($k-1$ paranteze mici); d) pentru $n = 2k+1$ (impar) reducem la cazul b) şi obţinem $4!+\sqrt{4}+\sqrt{4}+(4-4)+\ldots+(4-4) = 28$ ($k-1$ paranteze mici).