Despre numere, corpuri de numere şi căutarea esenţei

Marian TETIVA[1]

Abstract. It is well-known that, under certain obvious assumptions, a sum of radicals of rational numbers is *not* a rational number. We prove this assertion in the case of order two radicals (which is not at all a new proof) and try to exhibit some issues about mathematical reasoning in connection with this beautiful problem.

Keywords: rational numbers, radicals, number fields.

MSC 2000: 97C90, 97D50.

1. Problema. Pe când eram elev m-am întâlnit cu următorul enunţ (uşor modificat aici):

Problema 1 (M85 din [**1**]). *Dacă* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sunt numere întregi şi* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *sunt numere întregi pozitive libere de pătrate (nedivizibile cu pătratul vreunui număr natural mai mare ca 1) pentru care*

$$c_1\sqrt{d_1} + c_2\sqrt{d_2} + \cdots + c_n\sqrt{d_n} = 0$$

atunci $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Se găsesc şi pe Internet, în arhivele *Kvant* (http://kvant.mirror1.mccme.ru/), problema [5] şi soluţia ei [3] (dar nu se găseau defel "pe vremea mea"); cum acestea sunt în limba rusă (ceea ce s-ar putea să vă incomodeze puţin), folosiţi cu încredere [1]. Consideraţi toţi factorii primi distincţi ai numerelor $d_1, d_2, \ldots, d_n$, fie ei $p_1, p_2, \ldots, p_N$, şi gândiţi-vă de ce problema M85 rezultă din următoarea (de fapt, problemele 1 şi 2 sunt, practic, echivalente).

Problema 2. *Se dau numerele prime diferite* $p_1, p_2, \ldots, p_N$ *şi numerele raţionale* a_I *indexate după toate submulţimile* I *ale mulţimii* $\{1, 2, \ldots, N\}$*, pentru care avem*

$$\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,N\}} a_I\sqrt{\prod_{i\in I} p_i} = 0.$$

(*Suma se face după toate cele* 2^N *submulţimi ale mulţimii* $\{1, 2, \ldots, N\}$*. Produsul corespunzător mulţimii vide se consideră egal cu 1.*) *Atunci* $a_I = 0$*, pentru orice* $I \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$.

Analizând (cum se va vedea imediat) posibilitatea de a face o inducţie după N pentru a rezolva această problemă, am ajuns la concluzia că e mai bine să demonstrăm astfel (adică inductiv) următorul enunţ, o idee mai general:

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Problema 3. *Se dau numerele prime distincte $p_1, p_2, \ldots, p_N$ şi numerele raţionale a_I indexate după toate submulţimile I ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, N\}$, pentru care avem*

$$\left(\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,N\}} a_I \prod_{i \in I} \sqrt{p_i} \right)^2 \in \mathbb{Q}.$$

Atunci (măcar) $2^N - 1$ dintre numerele a_I sunt egale cu 0.

Evident, Problema 3 implică Problema 2. Nu cumva şi reciproc? În fine, am fost condus (după ceva eforturi) în miezul problemei - mereu îi dai ocol când vrei să rezolvi o problemă, mereu te învârţi pe la periferie în jurul centrului, esenţei acelei probleme (uneori poţi obţine câte ceva chiar şi neajungând în miez, doar dând târcoale).

Lemă. *Se consideră un corp K de numere reale şi un număr real α din afara lui K, dar astfel încât $\alpha^2 \in K$. Fie $K(\alpha)$ cel mai mic corp care conţine pe K şi α, altfel spus: $K(\alpha) = \{z \ : \ z = x + y\alpha, \ x, y \in K\}$. Atunci un element $z = x + y\alpha$ din $K(\alpha)$ are proprietatea că $z^2 \in K$ dacă şi numai dacă $x = 0$ sau $y = 0$.* (Menţionăm că acest enunţ se poate da şi pentru o extindere oarecare de corpuri $K \subseteq L$, cu $\alpha \in L$, $\alpha \notin K$, $\alpha^2 \in K$ etc.)

Totul se bazează pe această lemă! Înainte de a o demonstra, justificaţi că, întradevăr, $K(\alpha)$ este mulţimea numerelor de forma $x + y\alpha$, cu $x, y \in K$ şi că un element $z \in K(\alpha)$ se exprimă în mod unic în această formă (adică $x_1 + y_1\alpha = x_2 + y_2\alpha$, cu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$, implică $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$; sau, echivalent, că, pentru $x, y \in K$, avem $x + y\alpha = 0 \Rightarrow x = y = 0$; remarcaţi importanţa structurii de corp).

Acum *demonstraţia Lemei* este lesne de făcut. Să presupunem că $(x + y\alpha)^2 = r$, unde x, y şi r sunt elemente ale corpului K. Obţinem $x^2 + y^2\alpha^2 - r + 2xy\alpha = 0$, cu $x^2 + y^2\alpha^2 - r \in K$ şi $2xy \in K$, deci $2xy = 0$, deci $x = 0$ sau $y = 0$. Reciproca este limpede. Se vede că important e rezultatul menţionat în paranteza anterioară: $x + y\alpha = 0$, cu $x, y \in K$ şi $\alpha \notin K$ implică $x = y = 0$. Dar intenţionat l-am lăsat în paranteză, gândiţi-vă de ce!

Da! aşa se întâmplă de multe ori: un rezultat (ai zice că) banal conduce la senzaţionale concluzii.

2. Analiza problemei. Să încerc să explic cum mi-am dat seama de asta, pornind de la nişte cazuri simple, pe care le ştim cu toţii de prin clasa a noua.

Exerciţiul 1. Să se arate că dacă $x + y\sqrt{2} = 0$, cu $x, y \in \mathbb{Q}$, atunci $x = 0$ şi $y = 0$.

Rezolvarea e foarte simplă, vă recomand să v-o amintiţi. Dar mai ales vă recomand să sesizaţi, şi aici, care este esenţa: anume că $\sqrt{2}$ *nu* este număr raţional şi că un raport de numere raţionale este număr raţional - ceea ce deja ne conduce inexorabil către structura de corp a acestei mulţimi care le-a fost atît de dragă grecilor antici. Observaţi, de asemenea, că Exerciţiul 1 e un caz particular al Lemei.

Pe urmă, dacă aţi fost norocoşi, v-aţi intersectat şi cu

Exerciţiul 2. Să se arate că, dacă a, b, c, d sunt numere raţionale şi $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, atunci $a = b = c = d = 0$.

Acum lucrurile par (şi sunt) ceva mai delicate, dar cu câteva ridicări la pătrat şi folosind iar structura de corp a mulţimii numerelor raţionale, o veţi scoate la capăt. Vă spun că, studiind acest exerciţiu (pe care mai înainte l-am rezolvat de mai multe ori; l-am considerat greu la un moment dat, mi s-a părut din ce în ce mai simplu pe măsură ce trecea timpul şi îl reîntâlneam; totuşi, la fel cum se întâmplă cu oamenii, nu ştiam nimic despre el!), am descoperit Lema (*mi* s-a descoperit), căutând să-l rezolv altfel decât tradiţional. Şi Ideea a fost să scriu egalitatea în forma $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\sqrt{3}=0$, de unde să obţin

$$\sqrt{3}=-\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=e+f\sqrt{2}$$

cu e şi f numere raţionale. Dar asta nu se poate decât dacă $e=0$ sau $f=0$, căci $(e+f\sqrt{2})^2=3\in\mathbb{Q}$ (observaţi, vă rog, cum apare Lema), iar ambele conduc la contradicţie. Rămâne doar ca ecuaţia iniţială să nu poată fi rezolvată în raport cu $\sqrt{3}$, ceea ce înseamnă că avem $c+d\sqrt{2}=0$, şi atunci $a+b\sqrt{2}=0$, de asemenea. Conform Exerciţiului 1 rezultă atunci $a=b=c=d=0$, ceea ce trebuia demonstrat. De aici la soluţia problemei generale n-a mai fost de făcut decît pasul redactării.

3. Soluţia problemei. De fapt rezolvăm Problema 3, echivalenţa cu celelalte o lăsăm în grija cititorului. Pentru $N=1$, cu notaţiile $a_\emptyset=x$, $a_{\{1\}}=y$, şi $p_1=p$, trebuie să demonstrăm că, dacă $(x+y\sqrt{p})^2\in\mathbb{Q}$, atunci măcar unul dintre x şi y este 0. Ceea ce, clar, rezultă din Lemă, pentru $K=\mathbb{Q}$ şi $\alpha=\sqrt{p}$.

Să presupunem că enunţul este adevărat pentru N, şi să considerăm că $\left(\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,N+1\}} a_I\prod_{i\in I}\sqrt{p_i}\right)^2$ este număr raţional, $p_1,\ldots,p_{N+1}$ fiind numere prime distincte, iar a_I fiind 2^{N+1} numere raţionale (indexate după submulţimile mulţimii $\{1,\ldots,N+1\}$). Putem scrie această egalitate în forma $(x+y\sqrt{p_{N+1}})^2\in\mathbb{Q}$, cu

$$x=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,N\}} a_I\prod_{i\in I}\sqrt{p_i}\quad \text{şi}\quad y=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,N\}} a_{I\cup\{N+1\}}\prod_{i\in I}\sqrt{p_i}.$$

Desigur, x şi y sunt din corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_N})$, şi condiţia $(x+y\sqrt{p_{N+1}})^2\in\mathbb{Q}$ implică $(x+y\sqrt{p_{N+1}})^2\in\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_N})$; alegând $K=\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_N})$ şi $\alpha=\sqrt{p_{N+1}}$, conform Lemei avem $x=0$ sau $y=0$.

Pentru a putea aplica Lema trebuie să observăm că $\alpha^2=p_{N+1}\in\mathbb{Q}\subseteq K$ şi $\alpha\notin K$; asta deoarece $\alpha\in K$ ar însemna

$$\sqrt{p_{N+1}}=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,N\}} x_I\prod_{i\in I}\sqrt{p_i}$$

pentru anumite numere $x_I\in\mathbb{Q}$, $I\subseteq\{1,\ldots,N\}$. Atunci am avea, desigur, $\left(\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} x_I\prod_{i\in I}\sqrt{p_i}\right)^2=p_{N+1}\in\mathbb{Q}$, şi ipoteza de inducţie ne-ar spune că 2^N-1 dintre numerele x_I sunt 0, deci ne-ar rămâne o egalitate de forma $\sqrt{p_{N+1}}=x_{I_0}\prod_{i\in I_0}\sqrt{p_i}$ pentru o anume submulţime I_0 a lui $\{1,\ldots,N\}$, ceea ce n-ar fi posibil pentru nişte numere prime distincte $p_1, \ldots, p_{N+1}$ şi un număr raţional x_{I_0}. Astfel vedem că presupunerea $\alpha \in K$ conduce la contradicţie - deci este falsă.

Acum $x = 0$ înseamnă $x^2 \in \mathbb{Q}$, deci (tot conform ipotezei de inducţie) $2^N - 1$ dintre coeficienţii a_I, $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$ sunt nuli; cum $x = 0$, de fapt toţi cei 2^N coeficienţi sunt 0. De asemenea, condiţia iniţială se transformă în $(y\sqrt{p_{N+1}})^2 \in \mathbb{Q}$, adică $y^2 \in \mathbb{Q}$. Folosind încă o dată ipoteza de inducţie, deducem că $2^N - 1$ dintre numerele $a_{I \cup \{N+1\}}$, $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$ sunt zero. Astfel obţinem, în final, că $2^{N+1} - 1$ dintre coeficienţii a_I, $I \subseteq \{1, \ldots, N+1\}$, sunt zero - exact ceea ce am vrut să demonstrăm. Cazul $y = 0$ se tratează complet analog, şi demonstraţia se încheie aici.

4. Concluzii. E incredibil cum o lemă atât de mică destramă un rezultat aşa de puternic! (Buturuga mică răstoarnă carul mare, nu?)

Pe de altă parte, decalajul dintre Exerciţiile 1 şi 2 (din punct de vedere al dificultăţii) şi transformarea Problemei 1 (sau 2) în Problema 3 ne arată că esenţa primei probleme este alta decât s-ar putea bănui iniţial: nu este o problemă (doar) despre numere, nu este o problemă care caracterizează o *egalitate*. Nu: este o problemă care descrie condiţiile în care se realizează *apartenenţa* unui element la o anumită mulţime, mulţime a cărei structură de corp este esenţială (a se vedea iar Lema şi mai ales rezultatul pe care se bazează ea: $x + y\alpha = 0$ cu $x, y \in K$ şi $\alpha \notin K$ implică $x = y = 0$). Practic, o asemenea problemă ne conduce *obligatoriu* la considerarea corpurilor de forma $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_N}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})(\sqrt{p_2})\cdots(\sqrt{p_N})$ (veţi înţelege uşor ce înseamnă asta). E clar acum şi de ce se poate rezolva Exerciţiul 1, dar nu şi Exerciţiul 2, nu cu aceeaşi uşurinţă: pe primul îl poţi rezolva rămânând în afara esenţei; dar la al doilea găseşti o soluţie simplă (care constă în aplicarea de două ori a Lemei) doar dacă te-ai desprins de pe orbită, căzând fericit tocmai în nucleu. Calculele efective sunt mai complicate (ceea ce nu înseamnă că nu se poate şi aşa; dar încercaţi un exerciţiu similar cu primele două, care să reprezinte un caz oarecare al problemei 3 cu $N = 3$: înţelegeţi ce vreau să spun, da?).

O altă soluţie (în afara celor mai sus menţionate) se poate găsi în [**2**]. Şi mai trebuie spus că, evident, după ce am rezolvat astfel problema şi am scris despre ea această notă, am găsit undeva şi această abordare [**4**] - doar că acolo e formulată ceva mai tehnic. Toate-s vechi şi nouă toate!

Bibliografie

1. **H. Banea** - *Probleme traduse din revista sovietică Kvant*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
2. **I. Boreico** - *Linear independence of radicals*, The Harvard College Mathematics Review, `http://www.thehcmr.org/issue2_1/mfp.pdf`
3. **L.N. Kamnev** - *Iraţionalitatea unor sume de radicali*, (în limba rusă), *Kvant* 2/1972, pp. 26-27, `http://kvant.mirror1.mccme.ru/1972/02/p26.htm`
4. **D.J. Newman, H. Flanders** - *Solution of the Problem 4797*, The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 2 (Feb., 1960), pp. 188-189.
5. **L.N. Vaserstein** - *Problema M85Kvant*, 5/1971, p. 30, `http://kvant.mirror1.mccme.ru/1971/05/p30.htm`