CHESTIUNI METODICE

Asupra unor probleme de desfăşurare

Marian-Dumitru PANŢIRUC[1]

Abstract. Three problems of minimum lengths are solved. They have an obvious practical applicability (like Pisa type tests).

Keywords: right-angled parallelepiped, right circular cone.

MSC 2000: 51M04.

În această notă vom rezolva câteva probleme de geometrie de distanţă minimă. Ideea este de a face o desfăşurare laterală convenabilă. Prin conţinutul (mai mult sau mai puţin) practic al problemelor, putem să le legăm de testele de tip Pisa.

Problema 1. *În fig. 1 de mai jos sunt prezentate schematic două blocuri de locuinţe de 10 etaje + parter, respectiv de 4 etaje + parter. Blocul de 4 etaje are lungimea de 30 m şi este lat de 10m. Blocul de 10 etaje are baza un pătrat cu latura de 10m iar distanţa dintre blocuri este tot de 10m. Înălţimea unui nivel este de 2,5m. Să se afle lungimea celui mai scurt cablu de distribuţie (de semnal TV) care leagă punctele A şi M, unde M este mijlocul laturii pe care se află.*

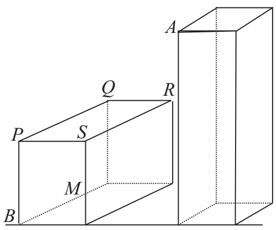

Fig.1

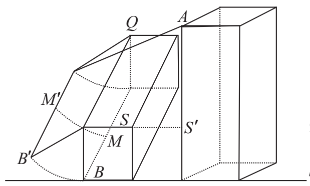

Fig.2

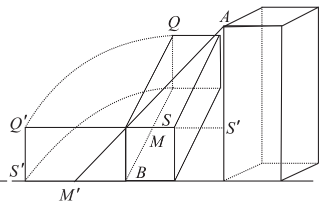

Fig.3

Soluţie. Bineînţeles, nu vom găuri pereţii blocului pentru a întinde cablul. Va trebui să ne "legăm" de marginile blocului pentru a duce firul din A în M. Sigur că avem mai multe posibilităţi de legare şi deci de a uni punctele A şi M.

Scrierea $A - RS - PQ - M$ înseamnă că firul pleacă din A, îl legăm prima dată pe muchia $[RS]$ ş.a.m.d. Este clar că nu sunt multe drumuri care merită luate în calcul:

1. $A - RS - PQ - M$ 2. $A - PS - PQ - M$ 3. $A - PQ - M$
4. $A - ST - PB - M$ 5. $A - PS - PB - M$ 6. $A - PB - M$.

Observăm că orice drum de tip 1 sau 2 este strict mai lung decât un drum de tip 3: suma a două laturi ale unui triunghi este strict mai mare decât cea de-a treia latură. De asemenea, nu ne putem lega de muchia PB fără a ne lega de una din muchiile ST sau PS. Cum punctele A, P, S, B, T sunt coplanare, cel mai scurt drum dintre 4, 5, 6 este cel de tipul 6. În acest moment a rămas să determinăm cel mai scurt drum de tip 3, cel mai scurt drum de tip 6 şi să le comparăm.

Pentru drumul de tip 3 desfăşurăm parţial blocul cu 4 etaje în planul (APQ), ca în fig. 2. Lungimea celui mai scurt drum unind A cu M va fi acum, în mod clar,

[1] Profesor dr., Şcoala generală nr. 28 "Mihai Codreanu", Iaşi

egală cu lungimea segmentului $[AM']$. Notăm cu S' punctul de intersecţie dintre PS şi muchia blocului cu 10 etaje situată în planul (APS). Înălţimea blocului cu 10 etaje fiind de $27,5m$ şi a celui de 4 etaje de $12,5m$, avem că $AS' = 15m$. Cum $PS' = 20m$, aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta PAS'$, obţinem $AP = 25m$. Astfel, $AB' = AP + PB' = 37,5m$ şi, aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta AB'M'$, găsim $M'A = 2,5\sqrt{261}\ m$.

Pentru drumul de tip 6 procedăm similar: vom desfăşura parţial blocul de 4 etaje în planul (APB) (fig. 3). Cu o simplă aplicare a teoremei lui Pitagora, obţinem $M'A = 2,5\sqrt{317}\ m$. Cel mai scurt cablu parcurge deci un drum de tip 3 şi are lungimea de aproximativ $40,4m$.

Se ridică problema existenţei drumului de tip 6 din desfăşurarea din figura 3, adică dacă nu cumva $M'A$ trece pe deasupra punctului P, fără să taie PS sau PB. Acest lucru îl lăsăm cititorilor spre verificare.

Problema 2. *În fig. 4 de mai jos este prezentată următoarea situaţie:*

- în punctul V, la înălţimea de $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ m este situat un bec luminând în noapte o zonă sub formă de con circular drept;

- discul luminat pe asfalt are centrul O şi raza de $3m$;

- în punctul S se află un şoarece suferind de insomnie;

- într-un copac, la o anumită înălţime se află o bufniţă B, în acelaşi plan cu becul, şoarecele şi punctul O.

În ani de experienţă la vânătoare, bufniţa ştie că distanţa de unde se află până la bec este egală cu distanţa până la punctul A şi că distanţa pe care o are de parcurs până la planul (VAC) este de $9m$ ((VAC) este secţiunea axială din con pe care bufniţa o vede privind şoarecele). Aflaţi cel mai scurt drum pe care îl parcurge bufniţa pentru a înşfăca şoarecele, ştiind că în orice moment ar pătrunde în interiorul conului de lumină, şoarecele o vede şi scapă.

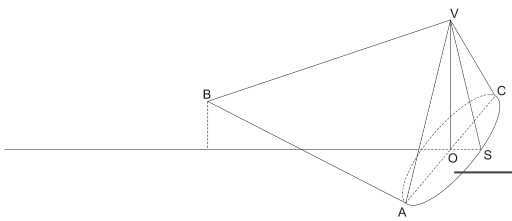

Fig. 4

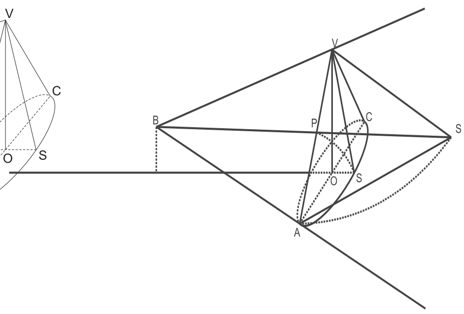

Fig. 5

Soluţie. Problema devine una simplă deîndată ce observăm că pentru a parcurge un drum cât mai scurt, bufniţa trebuie să treacă neapărat printr-un punct situat fie pe generatoarea VA, fie VC. Pentru a fixa lucrurile, presupunem că în drumul ei bufniţa trece prin generatoarea VA. Cum un con admite o desfăşurare plană, vom desfăşura şi noi conul în planul (VBA), generatoarea de "început" fiind VA iar sensul desfăşurării fiind $A-S-C-A$. Notînd cu S' punctul de pe desfăşurare corespunzător lui S, devine clar că drumul minim are lungimea egală cu cea a segmentului $[S'B]$ în planul (BAV) (fig. 5). Calculul este uşor, observând că măsura unghiului obţinut prin desfăşurarea laterală a conului are măsura de $240°$ şi deci $m(\widehat{S'VA}) = 60°$, triunghiul VAS' fiind astfel echilateral. Lăsăm calculele în seama cititorului.

Problema 3. *Pe o bobină cu forma de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, se înfăşoară un fir de cupru în felul următor: fiecare muchie laterală a paralelipipedului se împarte în n părţi egale. Firul pleacă din A trece apoi prin primul punct de diviziune de pe BB', apoi prin al doilea punct de diviziune de pe CC' ş.a.m.d. până ajunge într-unul din punctele bazei $A'B'C'D'$. Ştiind că $ABCD$ este un pătrat de latură $4cm$ şi $AA' = 10cm$, aflaţi numărul de părţi egale în care trebuie împărţită muchia laterală pentru ca firul de cupru să aibă lungimea de cel puţin $4m$.*

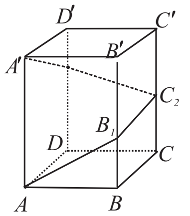

Fig. 6

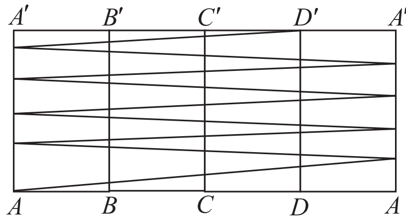

Fig. 7

Soluţie. Deşi putem rezolva problema şi fără desfăşurare laterală, fig. 7 arată un posibil "traseu" al firului pe suprafaţa laterală a bobinei. Este clar că lungimea firului este egală cu de n ori lungimea unei singure părţi la o trecere pe oricare din feţele laterale (l_n). Cum lungimea unei astfel de părţi, conform teoremei lui Pitagora, este

$$l_n = \sqrt{4^2 + \left(\frac{10}{n}\right)^2},$$

rezultă că lungimea firului este egală cu

$$l = n \cdot l_n = \sqrt{16n^2 + 100}\ cm.$$

Pentru ca lungimea firului să fie cel puţin $4m$, avem succesiv:

$$\sqrt{16n^2 + 100} > 400 \Rightarrow 16n^2 + 100 > 160000 \Rightarrow n^2 > \frac{159900}{16} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n > \sqrt{9993,75} \Rightarrow n \geq 100.$$

Faptul că n este minim 100 mai spune că grosimea firului de cupru nu poate depăşi $1mm$.