# Asupra unei identităţi clasice privind partea întreagă

***Florin POPOVICI***[1]

Prezentăm câteva consideraţiuni de ordin metodic asupra unei identităţi clasice privind partea întreagă a numerelor reale, pentru care dăm două demostraţii relativ cunoscute precum şi o a treia, simplă şi elegantă, despre care credem că este nouă.

**Problema 1** ([**1**], p. 20). Să se arate că

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

**Soluţie.** *Metoda I* ([**2**], p. 122). Conform teoremei împărţirii cu rest în $\mathbb{Z}$, există $q, r \in \mathbb{Z}$, unice, astfel încât $[x] = nq + r$, $0 \le r \le n-1$. Urmează că $\left[\frac{x}{n}\right] = q + \frac{r}{n}$. Rezultă că

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = q. \tag{2}$$

Deoarece $\frac{x}{n} = \frac{[x]+\{x\}}{n} = q + \frac{r+\{x\}}{n}$ şi $0 \le \frac{r+\{x\}}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$ rezultă că

$$\left[\frac{x}{n}\right] = q. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă că are loc (1).

*Metoda II* ([**1**], pb. 11, p. 21 şi 206). Evident, avem

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] \le \left[\frac{x}{n}\right]. \tag{4}$$

Din definiţia părţii întregi a unui număr real rezultă că $[x]+[y] \le [x+y]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Prin inducţie deducem că $n\,[x] \le [nx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ , $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Renotând variabilele, obţinem $\frac{[x]}{n} \ge \left[\frac{x}{n}\right]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Urmează că

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] \ge \left[\frac{x}{n}\right]. \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă (1).

*Metoda III.* Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definită prin $f(x) = \left[\frac{[x]}{n}\right] - \left[\frac{x}{n}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem

$$f(x+n) = \left[\frac{[x+n]}{n}\right] - \left[\frac{x+n}{n}\right] = \left[\frac{[x]+n}{n}\right] - \left[\frac{x+n}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right] + 1 - \left[\frac{x}{n}\right] - 1 = f(x),$$

deci funcţia $f$ este periodică de perioadă $n$. Pentru orice $x \in [0, n]$ avem $0 \le \frac{[x]}{n} < 1$ şi $0 \le \frac{x}{n} < 1$. Urmează că $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, n]$. Rezultă că $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci are loc (1).

---

[1] Prof. dr., Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Braşov

**Observaţia 1.** Metoda III este inspirată de una dintre metodele clasice [**2**] pentru demonstrarea celebrei identităţi a lui Hermite:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx], \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2.$$

**Bibliografie**


1. **L. Niculescu, I. Pătraşcu, A. Seclăman, M. Gălăţeanu** - *Exerciţii şi probleme de matematică. Clasa a IX-a*, Editura Cardinal, Craiova, 2004.
2. **I. M. Vinogradov -** *Bazele teoriei numerelor*, Editura Academiei, Bucureşti, 1954.


---

# Recreaţii ... matematice

**Profesorul** (către elevul de la tablă): *Preţul unui produs se măreşte cu 10%, după care se micşorează cu 10%. Compară preţul iniţial cu cel final!*

**Elevul**: $xy+10\%-10\%=xy$.

**Profesorul**: Bine, greşeala cu 10% din "nu se ştie ce" e veche, dar de ce $xy$?

**Elevul**: Păi, nu aţi spus *produs*?

(**Bogdan Enescu**)

---

*Scăderea de mai jos scrisă cu cifre romane este corectă:*

$$XI-X=I.$$

*Rotiţi pagina cu* 180° *şi veţi constata că relaţia rămâne adevărată (verificaţi!). Mai găsiţi şi o altă scădere de acest fel cu aceeaşi proprietate!*

**(Titu Zvonaru)**

**Răspuns.** Deoarece pot fi folosite doar numerele

$$I,\ II,\ III,\ IX,\ X,\ XI,\ XIX,\ XX,\ XXX,$$

prin încercări se obţin toate scăderile de acest fel:

$$X-IX=I$$
$$XI-X=I$$
$$XI-IX=II.$$