O abordare analitică a unor probleme de geometrie

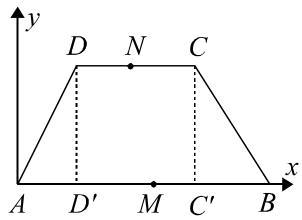
***Gabriel POPA*[1]*, Ioan ŞERDEAN*[2]**

Cu prilejul elaborării lucrării [**1**], am constatat că o serie de probleme de geometrie propuse juniorilor la O.B.M.J. admit rezolvări analitico-trigonometrice ceva mai simple decât cele "oficiale". Întrucât o parte dintre elevii din cl. a IX-a sunt încă eligibili pentru lotul juniorilor, iar elevii buni şi pasionaţi de matematică parcurg materia în avans, considerăm utilă prezentarea în această manieră a câtorva soluţii ale unor probleme care, abordate sintetic (vezi [**1**]), sunt dificile.

Problema 1. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 90°$. Să se arate că distanţa dintre mijloacele laturilor paralele este egală cu semidiferenţa bazelor.*

(*Problema 132*, Lista scurtă O.B.M.J., 2007)

Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în A, ca în figură. Fie D', C' proiecţiile punctelor D, respectiv C pe AB; notăm $t = m(\widehat{DAB})$, $a = AD'$, $b = D'C'$, $c = C'B$. Avem că $m(\widehat{CBA}) = 90° - t$ şi atunci $DD' = AD' \cdot \operatorname{tg} t = a \operatorname{tg} t$, iar $CC' = C'B \cdot \operatorname{tg}(90° - t) = \dfrac{c}{\operatorname{tg} t}$. Deci, $a \operatorname{tg} t = \dfrac{c}{\operatorname{tg} t}$, prin urmare $c = a \operatorname{tg}^2 t$. Vârfurile trapezului vor avea coordonatele $A(0,0)$; $B\left(a\left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) + b, 0\right)$; $C(a+b, a \operatorname{tg} t)$; $D(a, a \operatorname{tg} t)$, iar mijloacele bazelor $[AB]$ şi $[CD]$ au coordonatele $M\left(\dfrac{a\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)+b}{2}, 0\right)$, respectiv $N\left(\dfrac{2a+b}{2}, a \operatorname{tg} t\right)$. Lungimea segmentului MN este



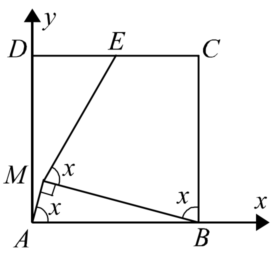
$$MN = \sqrt{\frac{a^2\left(\operatorname{tg}^2 t - 1\right)^2}{4} + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{\frac{a^2\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)^2}{4}} = \frac{a\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)}{2}.$$

Pe de altă parte, $\dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{a + c}{2} = \dfrac{a\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)}{2}$, de unde concluzia.

Problema 2. *Fie $ABCD$ pătrat, E mijlocul lui $[CD]$, iar M un punct interior pătratului astfel încât $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{BME}) = x$. Să se afle x.*

(*Problema 203*, Baraj O.B.M.J., 2003)

Soluţie. Raportăm planul la un reper cu originea în A, ca în figură; considerăm unitatea egală cu latura pătratului şi atunci $A(0,0)$; $B(1,0)$; $C(1,1)$; $D(0,1)$; $E(1/2, 1)$. Notăm $m = \operatorname{tg} x$, $m \in (0,1) \cup (1,\infty)$; panta dreptei AM este m, iar panta dreptei BM este $\operatorname{tg}(90° + x) = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = -\dfrac{1}{m}$. Astfel, $AM : y = mx$ şi $BM : y = -\dfrac{1}{m}(x - 1)$, iar prin intersectarea celor două



[1] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi
[2] Profesor, Liceul Teoretic "Aurel Vlaicu", Orăştie

drepte obţinem coordonatele lui M : $x_M = \dfrac{1}{1+m^2}$, $y_M = \dfrac{m}{1+m^2}$. Panta dreptei ME este $\dfrac{y_E - y_M}{x_E - x_M} = \dfrac{2m^2 - 2m + 2}{m^2 - 1}$, prin urmare

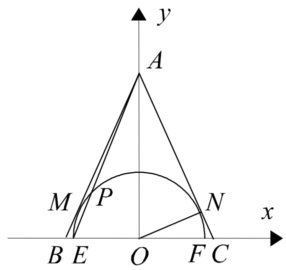
$$\operatorname{tg}\widehat{BME} = \left|\frac{m_{BM} - m_{ME}}{1 + m_{BM}\cdot m_{ME}}\right| = \left|\frac{2m^3 - m^2 + 2m - 1}{m^3 - 2m^2 + m - 2}\right| = \left|\frac{2m-1}{m-2}\right|.$$

Cum $\operatorname{tg}\widehat{BME} = \operatorname{tg} x = m$, obţinem ecuaţia $\left|\dfrac{2m-1}{m-2}\right| = m$, cu soluţiile $m \in \left\{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right\}$. Am văzut că $m \neq 1$ şi atunci rămâne că $m \in \left\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right\}$, adică $x \in \{15^\circ, 75^\circ\}$. Prima soluţie nu convine: dacă $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBC}) = 15^\circ$, atunci $\widehat{BME}$ este unghi obtuz. În concluzie, $x = 75^\circ$.

Problema 3. *Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$. Un semicerc de diametru $[EF]$, cu $E, F \in [BC]$, este tangent laturilor AB şi AC în M, respectiv N, iar AE retaie semicercul în P. Să se arate că dreapta PF trece prin mijlocul coardei $[MN]$.*

(*Problema 94*, Lista scurtă O.B.M.J., 2003)

Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în mijlocul O al segmentului $[BC]$, având dreapta BC drept axă a absciselor şi înălţimea din A drept axă a ordonatelor. Considerăm că $F\,(1,0)$, $E\,(-1,0)$, $C\,(b,0)$, $B\,(-b,0)$ şi fie $t = m(\widehat{CON})$; atunci $N\,(\cos t, \sin t)$, $M\,(-\cos t, \sin t)$. Cum $m(\widehat{ACO}) = 90^\circ - t$, avem că $\dfrac{AO}{OC} = \operatorname{tg}(\widehat{ACO}) = \operatorname{ctg} t$, deci $AO = b\operatorname{ctg} t = \dfrac{1}{\sin t}$, căci $b\cos t = ON = 1$ (din triunghiul dreptunghic ONC) şi astfel $A\left(0, \dfrac{1}{\sin t}\right)$. Ecuaţia dreptei AE va fi $y = \dfrac{1}{\sin t}\,(x+1)$ şi, intersectând această dreaptă cu cercul $x^2 + y^2 = 1$, obţinem ecuaţia în x:



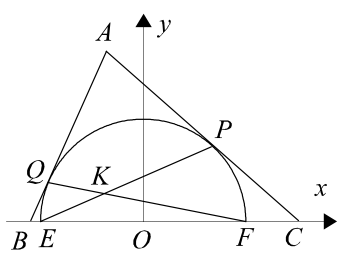
$$\left(1 + \sin^2 t\right) x^2 + 2x + \left(1 - \sin^2 t\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[\left(1+\sin^2 t\right) x - \left(\sin^2 t - 1\right)\right] = 0.$$

Ca urmare, $x_1 = -1$ şi $x_2 = \dfrac{\sin^2 t - 1}{\sin^2 t + 1}$, cărora le corespund punctele E, respectiv P. Cum $y_2 = \dfrac{1}{\sin t}\,(x_2 + 1) = \dfrac{2\sin t}{\sin^2 t + 1}$, avem $P\left(\dfrac{\sin^2 t - 1}{\sin^2 t + 1}, \dfrac{2\sin t}{\sin^2 t + 1}\right)$.

Dacă R este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci $R\,(0, \sin t)$; scriem imediat ecuaţia dreptei $RF : y = (1-x)\sin t$. Coordonatele (x_2, y_2) ale punctului P verifică această ecuaţie şi de aici rezultă concluzia problemei.

Problema 4. *Un semicerc având diametrul $[EF]$ inclus în latura $[BC]$ a triunghiului ABC este tangent laturilor AB şi AC în Q, repsectiv P. Notăm $\{K\} = EP \cap FQ$. Să se arate că AK este înălţime în triunghiul ABC.*

(*Problema 15*, O.B.M.J., 2000)



Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în O – mijlocul segmentului $[EF]$, având pe BC ca axă Ox şi perpendiculara în O pe BC ca axă Oy. Considerăm că $F(1,0)$, $E(-1,0)$, $P(\cos a, \sin a)$, $Q(\cos b, \sin b)$. Panta lui OP este $m = \operatorname{tg} a$ şi atunci panta lui AC va fi $-\dfrac{1}{m} = -\operatorname{ctg} a$; obţinem ecuaţia lui $AC : x\cos a + y\sin a = 1$. Analog, $AB : x\cos b + y\sin b = 1$ şi, intersectând cele două drepte, vom obţine pentru abscisa punctului A

$$x_A = \frac{\sin a - \sin b}{\sin(a-b)} = \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}.$$

Înălţimea din A fiind paralelă cu Oy, va avea ecuaţia $x = x_A$, adică $x = \dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$.

Pentru a afla coordonatele punctului K, vom intersecta dreptele EP : $\dfrac{x+1}{\cos a + 1} = \dfrac{y}{\sin a}$ şi FQ : $\dfrac{x-1}{\cos b - 1} = \dfrac{y}{\sin b}$. Eliminând pe y, găsim că

$$x_K = \frac{\sin a\cos b + \cos a \sin b - \sin a + \sin b}{\sin b\cos a - \sin a\cos b + \sin a + \sin b} = \frac{\sin(a+b) - (\sin a - \sin b)}{-\sin(a-b) + (\sin a + \sin b)} =$$
$$= \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a-b}{2}\right)}{2\cos\frac{a-b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a-b}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}.$$

Rezultă astfel că punctul K aparţine înălţimii din A, de unde concluzia problemei.

Rezolvând problemele de geometrie din [**1**], am remarcat că un procent semnificativ dintre ele (aproape 20%) admit soluţii calculatorii, în maniera celor prezentate în această notă. Încheiem prin a propune ca temă trei astfel de probleme.

Problema 5. *Fie ABC un triunghi echilateral de centru O, iar $M \in (BC)$. Fie K, L proiecţiile lui M pe AB, respectiv AC. Să se arate că OM trece prin mijlocul segmentului $[KL]$.*

(*Problema 135*, Lista scurtă O.B.M.J., 2006)

Problema 6. *Punctele M şi N se găsesc pe laturile (AD) şi (BC) ale rombului $ABCD$. Dreapta MC intersectează segmentul $[BD]$ în T, iar dreapta MN intersectează $[BD]$ în U. Dreapta CU intersectează dreapta AB în Q, iar QT intersectează latura $[CD]$ în P. Arătaţi că triunghiurile QCP şi MCN au aceeaşi arie.*

(*Problema 232*, Baraj O.B.M.J., 2005)

Problema 7. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în C şi punctele D, E pe laturile $[BC]$, respectiv $[CA]$, astfel încât $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{AE}{CD} = k$. Dreptele BE şi AD se intersectează în O. Să se arate că $m(\widehat{BOD}) = 60^\circ$ dacă şi numai dacă $k = \sqrt{3}$.*

(*Problema 246*, Baraj O.B.M.J., 2006)

Bibliografie

1. **D. Brânzei, D. Şerbănescu, G. Popa, I. Şerdean** - *10 ani de Olimpiade Balcanice ale Juniorilor*, Paralela 45, Piteşti, 2007.