CHESTIUNI METODICE

Acurateţea limbajului matematic în combinatorică

Laurenţiu MODAN[1]

Combinatorica, ramură distinctă a Matematicii, a apărut ca o consecinţă a încercării de rezolvare a problemelor de numărare. Mai puţin analitice decât în alte discipline matematice, raţionamentele sale, făcute aproape în mod primordial, o aproprie de aceea ce astăzi se numeşte *metalogică*.

Cum arătam şi în [**2**], o gândire matematică riguroasă şi educată ar trebui să înceapă cu învăţarea *Combinatoricii enumerative* şi să continue cu *Probabilităţile combinatoriale*, strict legate de cotidian, aşa cum actualmente se întâmplă la un număr important de naţiuni cultivate ştiinţific. Nu trebuie să uităm că astăzi Combinatorica, prin noile sale ramuri: *teoria grafurilor*, *teoria matroizilor*, *teoria codurilor* etc., este cel mai dinamic domeniu al matematicii, având numărul cel mai important de conjecturi enunţate şi rezolvate anual.

În România zilelor noastre, *Matematica discretă*, prin urmare şi Combinatorica, sunt efectiv neglijate! Iar educaţia precară a tinerilor, în acest domeniu, se reduce doar la mânuirea unor simple relaţii algebrice, deseori numite "formule", fără însă ca ei să poată discerne când trebuie să folosească *permutări*, *aranjamente* sau *combinări*, *simple* sau *cu repetiţie*, respectiv când trebuie să folosească *numărul funcţiilor* ce acţionează de la o mulţime de cardinal n, la o alta de cardinal m.

Vom reaminti (v. [**3**]) că, pentru mulţimea $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de cardinal n,

i) *permutările* sale diferă unele de altele doar prin ordinea elementelor şi sunt în număr de $n!$;

ii) *aranjamentele* grupelor de câte m elemente diferă prin ordinea şi tipul obiectelor şi sunt A_n^m;

iii) *combinările* ca număr al submulţimilor cu m elemente diferă doar prin tipul obiectelor şi sunt $\binom{n}{m} = C_n^m$.

Numărul funcţiilor $f : M \to \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, egal cu m^n, a fost detaliat în [**2**].

Menţionăm că este regretabil faptul că tinerii elevi şi studenţi nu sunt educaţi să înţeleagă rolul esenţial al cuvintelor şi exprimărilor folosite în Combinatorică. Astfel, constatăm cu surprindere, că în culegerea *Exerciţii şi probleme de algebră* [**1**], apărută în numeroase reeditări, timp de peste un sfert de veac, apar erori perpetue privind elementele de Combinatorică. În acest sens, la *Problema 25* din cap. X, constatăm aceeaşi eroare ca şi în ediţia din 1981, tipărită de Editura Didactică şi Pedagogică:

(1) *Pentru un joc, 3 băieţi şi 5 fete trebuie să formeze două echipe de câte 4. În câte moduri se pot forma echipele? Dar dacă în fiecare echipă trebuie să fie neapărat un singur băiat?*

Observăm că alcătuirea celor două echipe, de câte 4 persoane, revine la găsirea submulţimilor de câte 4 elemente, prin folosirea combinărilor. Prima echipă se va

[1] Prof. dr., Departamentul de matematică, Facultatea de informatică, A.S.E., Bucureşti

forma în C_8^4 moduri, în timp ce a doua se realizează din cele 4 persoane rămase, în C_4^4 moduri. Prin urmare, alcătuirea celor două echipe se face în $C_8^4 \cdot C_4^4 = 70$ moduri.

Vom constata apoi, că partea a doua a problemei este fără sens! Într-adevăr, dacă în fiecare echipă s-ar afla un singur băiat, atunci pentru prima ar trebui să avem 1 băiat şi 3 fete, iar pentru a doua ar mai trebui să existe o fată în plus.

Într-un limbaj combinatoric corect, partea a doua a problemei (1) ar trebui reformulată în maniera următoare:

(2) *În câte moduri se pot alcătui cele două echipe de câte 4 persoane, dacă în fiecare intră cel puţin un băiat?*

Pentru rezolvare, prima echipă, constituită dintr-un băiat şi 3 fete, poate fi aleasă în $C_3^1 \cdot C_5^3 = 3C_5^2 = 30$ moduri, în timp ce a doua echipă, formată din 2 băieţi şi 2 fete, se alege în $C_2^2 \cdot C_2^2 = 1$ mod. Cumulând situaţiile anterioare, decidem că echipele de 4 persoane, ce conţin cel puţin un băiat fiecare, se constituie în $30 \cdot 1 = 30$ moduri.

Problema anterioară admite următoarea generalizare:

(3) *În câte moduri* $2n-1$ *băieţi şi* $2n+1$ *fete pot forma două echipe de câte* $2n$ *persoane? Dar dacă în fiecare din cele două grupe trebuie să intre cel puţin un băiat?*

Lăsăm cititorului plăcerea de a constata că, în cazul general, cele două echipe se constituie în $\dfrac{(4n)!}{[(2n)!]^2}$ moduri, în timp ce pentru situaţia suplimentară, acestea se formează în $4n^3 - n + 1$ moduri. Când $n = 2$, regăsim situaţia discutată la (2), ca punct de plecare al prezentei note.

Pentru exersarea noţiunilor din Combinatorică, propunem cititorului interesat, rezolvarea următoarei probleme:

(4) *Fie* $A = \left\{3n \mid n = \overline{0, 33}\right\}$ şi B *submulţimea numerelor din* A *divizibile cu* 6.

i) În câte moduri se pot scrie pe 17 *cartoane de culori diferite elementele lui* B*?*

ii) Câte numere de 4 *cifre se pot forma cu elementele de câte* 2 *cifre, conţinute în* B*?*

iii) Câte numere de 4 *cifre, ordonate crescător, se pot forma cu elementele de câte două cifre, conţinute în* B*?*

Ca mijloc de verificare pentru cititor, dăm răspunsurile la (4), ce au ca punct de plecare mulţimea $B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$:

i) 17! moduri de scriere;

ii) 15+210=225 numere de 4 cifre, formate cu elementele de câte două cifre din B;

iii) 105 numere de 4 cifre, ordonate crescător şi formate cu elementele de câte două cifre, din B.

Bibliografie

1. **M. Brandiburu, D. Joiţa, C. Năstăsescu, I. Niţă** - *Exerciţii şi probleme de Algebră*, Ed. Rotech Pro, 2004, Bucureşti.
2. **L. Modan** - *Some Remarks Counting Functions*, Octogon Mathematical Magazin, Braşov, 15(2007), no.1, 262-265.
3. **E. Rogai** - *Tabele şi formule matematice*, Ed. Tehnică, 1984, Bucureşti.