Cum se poate obţine o inegalitate

Lucian TUŢESCU[1]

Prezentăm în cele ce urmează modul în care s-a obţinut inegalitatea (1) de mai jos, pe care o considerăm a fi interesantă şi susceptibilă de generalizări. Totodată, socotim că maniera de lucru urmată poate fi pentru elevi un model în obţinerea de rezultate proprii sugerate de probleme ce apar în paginile diverselor reviste.

Dacă x, y sunt numere reale cu acelaşi semn, atunci

$$x^{2n}+y^{2n}-x^n y^n \geq \left(x^2+y^2-xy\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Deşi inegalitatea (1) este una algebrică, povestea ei începe odată cu o problemă de geometrie propusă la *Concursul de matematică* de la *Kazanlîk, Bulgaria,* martie 2003.

Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ având $m(\widehat{AGB})=2m(\widehat{ACB})$. Arătaţi că:
a) $AB^4=AC^4+BC^4-AC^2\cdot BC^2$; *b)* $m(\widehat{ACB})\geq 60°$.

Soluţie. *a)* Notăm $\alpha=m(\widehat{ACB})$. Folosind teorema cosinusului, teorema medianei şi relaţii uzuale privind aria triunghiului, obţinem:

$$\cos 2\alpha=\frac{AG^2+BG^2-AB^2}{2\,AG\cdot BG}\Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{a^2+b^2-5c^2}{9\cdot 4S_{ABG}}\Leftrightarrow$$
$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{a^2+b^2-5c^2}{12S_{ABC}}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2-5c^2}{3ab}=2\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\Leftrightarrow$$
$$\frac{a^2+b^2-5c^2}{3ab}-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{-2ab}{a^2+b^2-c^2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{3ab}=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}\Leftrightarrow$$
$$\left(a^2+b^2\right)^2-c^4=3a^2b^2\Leftrightarrow c^4=a^4+b^4-a^2b^2.$$

b) Este suficient să arătăm că $\cos\alpha\leq\frac{1}{2}$, adică $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha\geq a^2+b^2-ab$, astfel spus $c^4\geq\left(a^2+b^2-ab\right)^2$. Apare deci firesc să dovedim inegalitatea

$$a^4+b^4-a^2b^2\geq\left(a^2+b^2-ab\right)^2, \tag{2}$$

care este tocmai (1) pentru $n=2$. Relaţia (2) se justifică uşor:

$$(2)\Leftrightarrow a^4+b^4-a^2b^2\geq\left(a^2+b^2\right)^2+a^2b^2-2ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow$$
$$2ab\left(a^2+b^2\right)\geq 4a^2b^2\Leftrightarrow 2ab\,(a-b)^2\geq 0,$$

cu egalitate pentru $a=b$.

Un prim pas în trecerea de la (2) la (1) este dat de:

Dacă x, y sunt numere reale nenule de acelaşi semn, atunci

$$x^{2^{k+1}}+y^{2^{k+1}}-x^{2^k}y^{2^k}\geq\left(x^2+y^2-xy\right)^{2^k}, \quad \forall k\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova

Justificarea acestui rezultat se obţine cu uşurinţă din (2), prin inducţie matematică. Tot inducţia ne ajută să facem trecerea la cazul general (1); prezentăm în continuare calculele complete.

Verificarea lui (1) pentru $n = 0, 1, 2$ este imediată. Presupunem că (1) este adevărată pentru $n = k$ şi vom demonstra că este adevărată pentru $n = k + 1$. Este suficient să arătăm că

$$x^{2k+2} + y^{2k+2} - x^{k+1}y^{k+1} \geq \left(x^2 + y^2 - xy\right)\left(x^{2k} + y^{2k} - x^k y^k\right), \qquad (*)$$

de unde va urma uşor concluzia inductivă. Inegalitatea $(*)$ devine succesiv:

$$x^{2k+2} + y^{2k+2} - x^{k+1}y^{k+1} \geq x^{2k+2} + x^2y^{2k} - x^{k+2}y^k + y^2x^{2k} + y^{2k+2} -$$
$$- x^k y^{k+2} - x^{2k+1}y - xy^{2k+1} + x^{k+1}y^{k+1} \Leftrightarrow$$
$$x^{k+2}y^k - x^k y^{k+2} + x^{2k+1}y + xy^{2k+1} - x^2y^{2k} - y^2x^{2k} - 2x^{k+1}y^{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$xy\left(x^k - y^k\right)^2 + x^2y^k\left(x^k - y^k\right) - x^k y^2\left(x^k - y^k\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$xy\left(x^k - y^k\right)\left(x^k - y^k + xy^{k-1} - yx^{k-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$xy\left(x^k - y^k\right)(x - y)\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$xy\,(x - y)^2\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}\right)\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) \geq 0,$$

relaţie evident adevărată. Egaliate se obţine când $x = y$.

Să notăm că (1) nu este, în general, adevărată atunci când x şi y au semne contrare. De exemplu, pentru $n = 4$, $x = 1$, $y = -1$ obţinem contradicţia $1 \geq 3^4$.

Două generalizări naturale ale lui (1) ar putea fi inegalităţile:

$$x^{4n} - x^{3n}y^n + x^{2n}y^{2n} - x^n y^{3n} + y^{4n} \geq \left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right)^n; \qquad (4)$$
$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} - x^n y^n - y^n z^n - z^n x^n \geq \left(x^2 + y^2 + y^2 - xy - xz - yz\right)^n, \qquad (5)$$

unde $n \in \mathbb{N}$, iar x, y, z sunt numere reale de acelaşi semn.

Nu cunoaştem până la data publicării acestui articol demonstraţii pentru (4) şi (5) în cazul general, însă am justificat cele două inegalităţi în cazul $n = 2$. Prezentăm calculele numai pentru (4):

$$x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8 \geq \left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8 \geq x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 - 2x^7y + 2x^6y^2 -$$
$$-2x^5y^3 + 2x^4y^4 - 2x^5y^3 + 2x^4y^4 - 2x^3y^5 - 2x^3y^5 + 2x^2y^6 - 2xy^7 \Leftrightarrow$$
$$-4x^2y^6 - 4x^6y^2 - 4x^4y^4 + 2x^7y + 4x^5y^3 + 4x^3y^5 + 2xy^7 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2xy\left[\left(x^3 - y^3\right)^2 + 2xy^2\left(x^3 - y^3\right) - 2x^2y\left(x^3 - y^3\right)\right] \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2xy\left(x^3 - y^3\right)(x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 2xy\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2xy\,(x - y)^2\left(x^2 - xy + y^2\right)^2 \geq 0,$$

ceea ce este adevărat.

Lăsăm deschisă problema demonstrării inegalităţilor (4) şi (5).